Thème : Intégrales, sommes et probabilités

Devoir de vacances partie II. On veillera à soigner la rédaction, le soin et la structure pour effectuer ce devoir. Il peut être bon de retenir les résultats vus dans les deux exercices.
Vous pourrez rendre votre copie à la rentrée (à condition d'avoir effectué un travail individuel - merci)

Exercice I : Intégrales classiques (avec convergence)

Soit k un entier naturel donné. On définit pour $x \geq 0$ la quantité $I_k(x)$ par :

$$I_k(x) = \int_0^x t^k e^{-t} \mathrm{d}t$$

On admettra que $I_0(x) = \int_0^x e^{-t} \mathrm{d}t$

1. Calculer la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} I_0(x)$
2. Dans cette question, on a $k = 1$:
   (a) A l'aide d'une intégration par parties (IPP), calculer la valeur de $I_1(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}_+$
   (b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} I_1(x)$ est un réel positif noté I_1 que l'on déterminera.
3. On revient au cas général où $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Pour $x \geq 0$ fixé, déterminer une relation liant x, k, $I_{k+1}(x)$ et $I_k(x)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur $\lim\limits_{x \to +\infty} I_k(x)$ existe dans $\mathbb{R}_+$.
   On notera I_k cette valeur limite.
   (c) Ecrire une relation de récurrence liant I_{k+1} et I_k
   (d) Exprimer enfin I_k en fonction de k.
4. Réaliser une étude comparable avec les quantités :

$$J_n(\lambda) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^k e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t$$

   avec $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$ réel.
   Indication : On pourra utiliser un changement de variables $s = \lambda t$ dans l'intégrale pour se ramener à l'étude effectuée.
   On gardera alors à l'esprit que $\mathrm{d}s = \lambda \mathrm{d}t$ dans ce contexte.

Exercice II : *Sans mémoire... dit le poisson*

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$.
On dit que la loi de X est *sans mémoire* lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \forall h > 0 \quad \mathbb{P}_{[X>h]}[X > x + h] = \mathbb{P}[X > x]$$

l'événement $[X \geq h]$ étant ainsi de probabilité non nulle.

1. Justifier que les lois uniformes (finies ou continues) ne sont pas sans mémoire.
2. Etablir que la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$ est sans mémoire.
3. La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est-elle sans mémoire ?

Nous verrons une loi *à densité* caractéristique de la propriété *sans mémoire* : la loi exponentielle. Les applications sont nombreuses, dont l'étude de durée de vie des appareils électroniques, ménagers etc...

Problème d'archive en deux parties à nombre de parties non borné

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0,1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.
   (a) Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}\,x^n$.
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n}{r} x^n$ est convergente.
2. (a) Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$. Donner la valeur de S_0.
   (b) Etablir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)\,S_{r+1} = x\,S_r$.
   (c) En déduire que : $\forall x \in]0,1[\,,\ \forall r \in \mathbb{N}\,,\ \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.
   (d) Donner enfin la valeur de $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.
Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

- X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.
- Y le nombre de manches gagnées par le joueur.
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires réelles définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$.

1. (a) Donner la loi de X. (On pourra noter D_k l'événement "Le joueur ne joue pas la $k$ème manche").
   (b) On pose $T = X+1$. Reconnaître la loi de T puis en déduire que l'on a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.
   (c) En déduire également la valeur de $\mathbb{V}(X)$.
2. (a) Déterminer, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$ (c'est-à-dire, les valeurs de $\mathbb{P}_{[X=n]}([Y=y])$ pour $y \in Y(\Omega)$)
   (b) En déduire à l'aide de la *partie 1* la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y, puis montrer que $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.
4. (a) Exprimer G en fonction de X et Y.
   (b) En déduire l'espérance de G.
   (c) On admet l'existence de $\mathbb{E}(XY)$. Etablir que $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(2-\alpha)}{\alpha^2}$.
   (d) En déduire la variance de G.

[*D'après EDHEC-2015 voie S*]