Concours Blanc C_2

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème I : Algèbre Linéaire 2 bases

On note dans ce problème $\mathcal{B} = (e_1 \ ; \ e_2 \ ; \ e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on désigne par I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ainsi que par O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On définit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible. On notera S l'ensemble des valeurs λ obtenues.
2. Décrire chaque noyau $ker(A - \lambda I_3)$ pour les valeurs λ de S. En particulier, donner une base et la dimension.
3. On désigne par H le sous-espace vectoriel $vect(e_1; e_2)$ de $\mathbb{R}^3$ et on définit $a = (-3 \ ; \ 1 \ ; \ 2)$.
   (a) Justifier que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $v(a)$.
   (c) Déterminer $b \in H$ tel que $v(b) = a - b$
   (d) Justifier qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions :
   $$\begin{cases} v(c) = & b - c \\ \exists \gamma \in H \ \ c = & \gamma + e_3 \end{cases}$$
   (e) Démontrer que $\mathcal{B}' = (a \ ; \ b \ ; \ c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
4. Déterminer la matrice T de l'endomorphisme v dans la base $\mathcal{B}'$
5. Etablir que $(T + I_3)^3 = O_3$.
6. En déduire que $(A + I_3)^3 = O_3$
7. Déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.

D'après concours ens-D2 - Paris Saclay 2015

Problème II : Tirer des boules, ne pas la perdre

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. On désigne par p la *proportion* de boules blanches et on pourra désigner par q la *proportion* de boules noires.
Ainsi, on a :$(p; q) \in]0; 1[^2$ et $p + q = 1$.

Partie 1. Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs, avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T, en justifiant soigneusement. On précisera les valeurs de $\mathbb{P}[T = k]$ pour $k \geq 1$ (entier) ainsi que $\mathbb{E}[T]$ et $\mathbb{V}[T]$ (espérance et variance respectivement)
2. En déduire que U admet une espérance et une variance puis les déterminer.

Partie 2. Tirages avec arrêt dès qu'une seconde boule noire a été tirée

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs, avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une *deuxième* boule noire. On note S la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. On admet que S peut être définie sur un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$

1. Etude de la loi de S :
   (a) Déterminer $S(\Omega)$.
   (b) Calculer les valeurs de $\mathbb{P}[S = 2]$ ainsi que $\mathbb{P}[S = 3]$.
   (c) Pour tout $k \geq 3$, déterminer $\mathbb{P}[S = k]$.
2. Démontrer que S admet une espérance et la calculer.
3. Démontrer que S admet une variance et la calculer.

Partie 3. Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire et une boule blanche ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On définit alors :

- X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
- Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
- Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
- B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche" (avec $i \in \mathbb{N}^*$)
- N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire" (avec $i \in \mathbb{N}^*$)

On pourra observer que $\mathbb{P}\left([Y = 1] \cup [Z = 1]\right) = 1$

1. (a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$ on a $\mathbb{P}[X = k] = qp^{k-1} + pq^{k-1}$
   (b) Vérifier, par le calcul, que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}[X = k] = 1$
   (c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$
2. (a) Calculer $\mathbb{P}\left([X = 2] \cap [Y = 1]\right)$.
   (b) Pour $k \geq 3$, entier, déterminer $\mathbb{P}\left([X = k] \cap [Y = 1]\right)$
   (c) En déduire que $\mathbb{P}[Y = 1] = q(1 + p)$
   (d) Déterminer ainsi la loi de Y
3. Justifier que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1 - p + p^2}{q}$
4. Décrire la loi de Z puis déterminer son espérance. Des justifications sont attendues.

Problème III : Une fonction qui rayonne !

On désigne par $\Gamma(x)$ l'intégrale généralisée s'écrivant :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

Le but de la première partie est d'établir que Γ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra alors admettre ce résultat pour effectuer la seconde partie, si besoin.

Etude de la convergence de $\Gamma(x)$

1. On pose, par convention, $t^0 = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Démontrer alors que $\Gamma(1)$ est convergente et que $\Gamma(1) = 1$
2. On rappelle que, par définition, pour $t > 0$ et $a > 0$ réels on a $t^a = e^{a \ln t}$. Démontrer que la fonction $t \mapsto t^a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ admet un prolongement par continuité en $t = 0$, pour tout $a > 0$ et préciser alors la valeur en 0 de ce prolongement. Dans la suite, on pourra identifier $t \mapsto t^a$ et ce prolongement.

3. Justifier que, pour $x > 1$, l'intégrale $\Gamma(x)$ est convergente.
4. Etablir, pour $x \in]0;1[$, la convergence de $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ ainsi que celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
5. Démontrer que pour tout $x \leq 0$, $\Gamma(x)$ est l'écriture d'une intégrale (impropre) divergente.
6. Conclure quant au domaine de définition (réel) de $\Gamma : x \mapsto \Gamma(x)$

Dans la suite, on pourra admettre que Γ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles positives et que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ (ce dernier point n'étant pas démontré dans ce problème).

Propriétés autour de la fonction Γ

1. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$ pour $x > 0$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \Gamma(n+1) = n!$
3. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Etablir que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   On admettra que $\forall k \in \mathbb{N}\ \ \Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ dans la suite.
4. Démontrer que la fonction Γ est convexe sur $]0;+\infty[$.
5. Dans cette question, f et g désignent deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$
   (a) Etablir que :
   $$\forall (t;A) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \qquad \int_0^A (f(x)+tg(x))^2dx = \int_0^A |f(x)|^2\,dx + 2t\int_0^A f(x)g(x)dx + t^2\int_0^A |g(x)|^2\,dx$$
   (b) Justifier que si $P(X) = X^2 + \alpha X + \beta$ est un polynôme positif sur $\mathbb{R}$, alors $\alpha^2 \leq 4\beta$
   (c) En déduire l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz :
   $$\forall A \in \mathbb{R}_+^* \qquad \left(\int_0^A f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^A |f(x)|^2\,dx\right)\left(\int_0^A |g(x)|^2\,dx\right)$$
6. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que :
   $$\forall (x,A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \left(\int_0^A \ln(t)e^{-t}t^{x-1}dt\right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln(t))^2e^{-t}t^{x-1}dt\right)\left(\int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt\right).$$
7. Démontrer que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

D'après ECRICOME voie S - 2014

Problème IV : Parce qu'une $\exp$ ne vaut pas des e

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer la courbe représentative de f.
4. (a) Etudier les variations de la fonction $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Etude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
2. (a) Etudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
4. (a) Démontrer : $\qquad \forall x \in [2;+\infty[, \qquad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$
   (b) En déduire : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n.$
   (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge et calculer cette intégrale.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge-t-elle ?
3. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question 9. (a).

D'après EMLyon voie E - 2017