Lycée Turgot — **Corrigé C_2** — ENS 2D2 2021 / 2022

Problème I

1°/ Ceci revient à demander $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$\det(A - \lambda \cdot I_3) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} -10-\lambda & -3 & -12 \\ 5 & -\lambda & 7 \\ 6 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} -10-\lambda & -3 & -12 \\ 3\lambda+5 & 0 & \frac{7}{2}\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + 7 \\ 6 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \frac{\lambda}{2} L_3$$

$$\iff \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -\frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2} \\ 3\lambda+5 & 0 & \frac{7}{2}\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + 7 \\ 6 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2} L_3$$

$$\iff -2 \begin{vmatrix} -1-\lambda & -\frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2} \\ 3\lambda+5 & \frac{7}{2}\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff +2 \left[(1+\lambda)\left(\frac{7}{2}\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + 7\right) - (3\lambda+5)\left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\right) \right] = 0$$

$$\iff 2(\lambda+1)\left[\frac{7}{2}\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + 7 - \frac{3}{2}(3\lambda+5)\right] = 0$$

$$\iff 2(\lambda+1)\left[-\frac{\lambda^2}{2} - \lambda - \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$\iff (\lambda+1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0 \iff (\lambda+1)^3 = 0$$

$\iff \lambda = -1$ Donc $S = \{-1\}$

2°/ Il n'y a qu'un noyau à décrire :

$$\ker(A + I_3) : \begin{cases} -9x - 3y - 12z = 0 \\ 5x + y + 7z = 0 \\ 6x + 2y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + y + 4z = 0 \\ 5x + y + 7z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + y + 4z = 0 \\ 5x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -3x - 4z \\ y = -5x - 7z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x - 4z = -5x - 7z \\ y = -3x - 4z \end{cases} \iff \begin{cases} 3z = -2x \\ y = -3x - 4z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2} z \\ y = \frac{9}{2} z - 4z = \frac{1}{2} z \end{cases}$$

Finalement $K = \ker(A + I_3) = \left\{\left(-\frac{3}{2}z ; \frac{1}{2}z ; z\right) ; z \in \mathbb{R}\right\}$

$= \operatorname{vect}((-3 ; 1 ; 2))$ donc $\dim K = 1$

et on a $((-3 ; 1 ; 2))$ base de $K = \ker(A + I_3)$

3°/ (a) $(e_1 ; e_2)$ est libre comme sous-famille d'une base de $\mathbb{R}^3$; il vient que $\dim H = 2 = 3 - 1$

donc H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

($H = \operatorname{vect}(e_1 ; e_2)$ est bien un sous-e.v. par définition de vect)

(b) $\sigma(a)$ ~~est~~ donné par :

$$A\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30 & -3 & -24\\ -15 & +0 & +14\\ -18 & +2 & +14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Soit $\sigma(a) = (3\,;\,-1\,;\,-2) = -a$

(c) on a $b \in H \iff \exists (b_1;b_2) \in \mathbb{R}^2 \quad b = (b_1;b_2;0)$

On va donc poser :

$$A\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3-b_1\\1-b_2\\2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-10b_1-3b_2\\5b_1\\6b_1+2b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3-b_1\\1-b_2\\2\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}9b_1+3b_2 = 3\\5b_1+b_2 = 1\\6b_1+2b_2 = 2\end{cases} \iff \begin{cases}3b_1+b_2 = 1\\5b_1+b_2 = 1\\3b_1+b_2 = 1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}5b_1+b_2 = 1\\3b_1+b_2 = 1\end{cases} \iff \begin{pmatrix}5 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Or, $M = \begin{pmatrix}5 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}$ vérifie $\det M = 5-3 \neq 0$

donc M est inversible d'inverse $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-3 & 5\end{pmatrix}$

et finalement $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

Soit $b = (0\,;\,1\,;\,0) = e_2$

(d) écrire $\exists \gamma \in H \quad c = \gamma + e_3$

revient à demander c s'écrit $(c_1\,;\,c_2\,;\,1)$

On va donc étudier $\begin{cases}\sigma(c) = b - c\\ \exists (c_1;c_2) \in \mathbb{R}^2 \quad c = (c_1\, c_2\, 1)\end{cases}$

Or $\sigma(c)$ se décrit par $A\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10c_1 & -3c_2 & -12\\5c_1 & & +7\\6c_1 & +2c_2 & +7\end{pmatrix}$

et $b - c = \begin{pmatrix}-c_1\\1-c_2\\-1\end{pmatrix}$ sous condition $c = (c_1\, c_2\, 1)$

On pose et résout alors :

$$\begin{cases}-10c_1 - 3c_2 - 12 = -c_1\\5c_1 + 7 = 1-c_2\\6c_1+2c_2+7 = -1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}9c_1+3c_2+12 = 0\\5c_1+c_2+6 = 0\\6c_1+2c_2+8 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}3c_1+c_2 = -4\\5c_1+c_2 = -6\\3c_1+c_2 = -\frac{8}{2} = \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}3c_1+c_2 = -4\\5c_1+c_2 = -6\end{cases} \iff \begin{pmatrix}3 & 1\\5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}5 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix} \iff M\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$$

Soit $c_1 = -1$ et $c_2 = -1$

En conclusion $c = (-1\,;\,-1\,;\,1)$ est l'unique possibilité ; si l'on vérifie : $\sigma(c) = (1\,;\,2\,;\,-1)$

or $b - c = (0+1\,;\,1+1\,;\,0-1) = (1;2;-1)$

Nous avons bien l'existence et l'unicité d'un tel c ...

(e) Nous calculons $\begin{vmatrix}-3 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\\2 & 0 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-3 & 1\\2 & -1\end{vmatrix} = 3-2$

$= 1 \neq 0$

Ce ci suffit à prouver que $\mathcal{B}' = (a ; b ; c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

4% Nous résumons :

$\upsilon(a) = -a$; $\upsilon(b) = -b + a$; $\upsilon(c) = b - c$

ce que l'on résume sous forme matricielle :

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\upsilon) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

5% $(T + I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$ par calcul direct

6% $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\upsilon)$ donc $(\upsilon + id_{\mathbb{R}^3})^3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ en tant qu'endomorphisme et donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\upsilon)$ permet d'aboutir pareillement à :

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left((\upsilon + id_{\mathbb{R}^3})^3\right) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\upsilon) + I_3)^3 = (A + I_3)^3$

$\Longrightarrow O_3 = (A + I_3)^3$

7% On réécrit $A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = O_3$

à partir de 6% donc $A^3 + 3A^2 + 3A = -I_3$

$\Longrightarrow A\left[-A^2 - 3A - 3I_3\right] = I_3$

A est inversible puisqu'admet un inverse à droite

et on a. $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3$

Problème II

Partie 1.

1% La répétition de tirages successifs avec remise dans des conditions que l'on supposera identiques et indépendantes conduit à un schéma de Bernoulli pour lequel le nombre d'essais amenant au 1er succès suit une loi géométrique.

La proportion de boules noires étant q on a $T \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$

On précise, par référence au cours :

$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}[T = k] = q \cdot p^{k-1}$

$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{q}$ et $\mathbb{V}(T) = \frac{1-q}{q^2} = \frac{p}{q^2}$

2% Il est aisé de constater que $U = T - 1 \Leftrightarrow T = U+1$

d'où par linéarité de $\mathbb{E}$ on a $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(T) - 1$

$\Longrightarrow \mathbb{E}(U) = \frac{1}{q} - 1 = \frac{1-q}{q} = \frac{p}{q}$

et $\mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(T-1) = \mathbb{V}(T) = \frac{p}{q^2}$

partie 2.

1% Etude de S

(a) Le nombre de tirages est un entier naturel, au moins 2 et non majoré a priori.

on peut écrire $S(\Omega) = [\![2 ; +\infty [\![= \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$

(b) $[S = 2]$ revient à "on tire successivement deux boules noires" d'où $\mathbb{P}[S=2] = q \times q = q^2$

· Réaliser $[S=3]$ revient à obtenir l'un des deux types de réalisations (○ ● ●) ou (● ○ ●) que l'on détermine, par indépendance mutuelle des tirages :

$\mathbb{P}[S=3] = pqq + qpq = 2pq^2$

(c) Notons N_i : " le $i^{ème}$ tirage est une boule noire " pour $i \in \mathbb{N}$. On a ainsi : pour $k \geq 3$

$$\mathbb{P}[S=k] = \mathbb{P}\left[N_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \left[N_i \cap \bigcap_{j \neq i} \overline{N_i}\right]\right)\right]$$

Les événements $\left(N_i \cap \bigcap_{j \neq i} N_i\right)_{i \leq k-1}$ sont 2 à 2 incompatibles donc $\mathbb{P}[S=k] = \mathbb{P}_{A_k}(N_k) \cdot \mathbb{P}(A_k) = q\mathbb{P}(A_k)$

où $A_k = \bigcup_{i=1}^{k-1} \left[N_i \cap \bigcap_{j \neq i} \overline{N_i}\right]$

On calcule $\mathbb{P}[A_k] = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\left[N_i \cap \bigcap_{j \neq i} \overline{N_i}\right]$

$= \sum_{i=1}^{k-1} qp^{k-2} = (k-1)qp^{k-2}$

En conclusion $\mathbb{P}[S=k] = (k-1)q^2p^{k-2}$

2/ Dire que S admet une espérance revient à demander $\sum_{k \in [\![2;+\infty[\![} k\mathbb{P}[S=k]$ CVA

Or $k \geq 2 \Rightarrow (k > 0$ et $\mathbb{P}[S=k] \geq 0)$

Il suffit d'étudier la convergence de

$\sum_{k \geq 3} k(k-1)q^2p^{k-2}$ (le terme $2q^2$ n'influe pas sur la CV)

Or $\sum_{k \geq 1} k^2 p^k$ converge lorsque $p \in]0;1[$ de même que $\sum_{k \geq 2} k(k-1)p^{k-2}$ par reconnaissance d'une série géométrique (2^{nde} dérivée)

Il vient que $q^2 \sum_{k \geq 3} k(k-1)p^{k-2}$ converge et donc S admet une espérance.

On calcule $\mathbb{E}(S) = 2q^2 + q^2 \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2}$

$= 2q^2 + q^2 \cdot \left(\frac{2}{(1-p)^3} - 2 \times 1 \times p^0\right)$

$= 2q^2 + \frac{q^2}{q^3} = 2q^2 + \frac{2}{q} - 2q^2$

$= \frac{2}{q}$

3/ Dire que S admet une variance revient à demander l'existence d'un moment quadratique qui se décrit comme :

$$\mathbb{E}(S^2) = \sum_{k=2}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}[S=k] \text{ si existence.}$$

On étudie la CVA de $\sum_{k \geq 2} k^2 \mathbb{P}[S=k]$

ce qui revient à l'étude de CV de $\sum_{k \geq 3} k^2(k-1)q^2p^{k-2}$ par positivité des termes (et éviction d'un terme)

Or, Soit $r \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a, pour $p \in]0;1[$

$$k^r p^k = k^r(\sqrt{p})^k (\sqrt{p})^k \text{ et } \lim_{k \to +\infty} k^r(\sqrt{p})^k = 0$$

par croissances comparées comme $0 < \sqrt{p} < 1$

Ainsi $k^r p^k = o(\sqrt{p})^k$ et $\sum_{k \geq 1} (\sqrt{p})^k$ CV

Comme série géométrique de référence avec $0 < \sqrt{p} < 1$

<u>NB</u> : Ceci prouve aussi bien les situations $r=2$ que $r=3$

Comme $k^3 \underset{k \to +\infty}{\sim} k^2(k-1)$ on en déduit, par critère d'équivalence, la convergence de $\sum_{k \geq 3} k^2(k-1)\,p^{k-2}$

$(p^{k-2} = p^k \cdot p^{-2}$ et p^{-2} est une constante de $k)$

d'où, par linéarité, on a $\sum_{k \geq 3} k^2(k-1)\,p^{k-2} q^2$ CVA

et ainsi S admet un moment quadratique.

On peut utiliser $\sum_{k \geq 3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\,p^{k-3} = \left(\frac{1}{1-p}\right)'''$

soit encore $\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\,p^{k-3} = \frac{6}{(1-p)^4} = \frac{6}{q^4}$

Ainsi $\mathbb{E}(S^2) = 4\mathbb{P}[S=2] + q^2 \sum_{k=3}^{+\infty} (k+1-1)k(k-1)\,p^{k-2}$
(théorème de Transfert)

$= 4q^2 + q^2 \sum_{k=4}^{+\infty} \left(k(k-1)(k-2) - (k-1)(k-2)\right) p^{k-3}$

$= 4q^2 + q^2 \sum_{k=4}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\,p^{k-3} - q^2 \sum_{k=4}^{+\infty} (k-1)(k-2)\,p^{k-3}$

(les deux séries cv bien)

$= 4q^2 + q^2 \cdot \left(\frac{6}{q^4} - 3 \times 2 \times 1 \times p^0\right) - q^2 \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)\,p^{k-2}$

$= 4q^2 + \frac{6}{q^2} - 6q^2 - q^2\left(\frac{2}{(1-p)^3} - 2 \times 1 \times p^0\right)$

$= 4q^2 + \frac{6}{q^2} - 6q^2 - \frac{2}{q} + 2q^2$

$= \frac{6}{q^2} - \frac{2}{q} = \frac{6-2q}{q^2}$

Ainsi, par la formule de Koenig-Huygens on a :

$\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2$

$= \frac{6-2q}{q^2} - \left(\frac{2}{q}\right)^2 = \frac{6-2q}{q^2} - \frac{4}{q^2}$

$= 2\,\frac{1-q}{q^2} = 2\,\frac{p}{q^2}$

<u>partie 3.</u>

1/ (a) Montrons que pour $k \geq 2$ on a $\mathbb{P}[X=k] = qp^{k-1} + pq^{k-1}$

Pour cela, observons que réaliser $[X=k]$ ne peut se faire que de deux façons incompatibles :

- obtenir QUE des blanches aux $k-1$ premiers tirages puis une boule noire au $k^{ième}$ tirage
- obtenir QUE des noires aux $k-1$ premiers tirages puis une boule blanche au $k^{ième}$ tirage.

Ceci se décrit encore $[X=k] = \left(B_k \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} N_i\right) \sqcup \left(N_k \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right)$

d'où l'on tire $\mathbb{P}[X=k] = p\,q^{k-1} + q\,p^{k-1}$

par raisonnement assez similaire à 1/ (partie 2.)

(b) On a $p \in]0;1[$ et $q \in]0;1[$; ainsi

$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} p^{k-1}$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} q^{k-1}$ convergent comme séries géométriques. On obtient, par linéarité, la convergence de $q \sum_{k \in \mathbb{N}^*} p^{k-1} + p \sum_{k \in \mathbb{N}^*} q^{k-1}$

donc celle de $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} qp^{k-1} + pq^{k-1}$ et celle de

$\sum_{k \geq 2} qp^{k-1} + pq^{k-1}$. Nous pouvons calculer :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=2}^{+\infty} q p^{k-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} p q^{k-1}$$

$$= q \sum_{k=1}^{+\infty} p^k + p \sum_{k=1}^{+\infty} q^k$$

$$= q\left(\frac{1}{1-p} - 1\right) + p\left(\frac{1}{1-q} - 1\right)$$

$$= \frac{q}{q} - q + \frac{p}{p} - p = 2 - (p+q)$$

$$= 2 - 1 = 1$$

La vérification est effectuée.

* Correction 1(b) sur Feuille *

2/ (a) $\mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1]) = \mathbb{P}\left[(N_1 \cap B_2) \cup (N_2 \cap B_1)\right]$

$= pq + qp = 2pq$ (NB : c'est $\mathbb{P}[T=2]$ en fait)

(b) $\mathbb{P}[[X=k] \cap [Y=1]] = \mathbb{P}\left[B_k \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} N_i\right] = pq^{k-1}$

et ce pour $k \geq 3$

(c) On va exploiter la formule des probabilités totales, utilisée avec le SCE $([X=k])_{k\geq 2}$ on obtient :

$$\sum_{k\geq 2} \mathbb{P}[[X=k] \cap [Y=1]] = \mathbb{P}[Y=1]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}[Y=1] = 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} pq^{k-1} \quad \text{(cv déjà connue)}$$

$$= 2pq + p \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}$$

$$= 2pq + p \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} q^k$$

$$= 2pq + p \cdot \left[\frac{1}{1-q} - 1 - q\right]$$

$$= 2pq + \frac{p}{p} - p - pq = pq + q$$

$= q(1+p)$ ce qui est le résultat attendu

(d) Nous remarquons, d'après les conditions fournies par l'énoncé que :

Feuille *

1/(b) Nous observons que $\forall p \in]0;1[$ $\sum_{k\geq 2} k p^{k-1}$ cv

comme série géométrique de référence (sa dérivée)

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} k p^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2} - 1$$

Donc, $q \sum_{k\geq 2} k p^{k-1} + p \sum_{k\geq 2} k q^{k-1}$ cv

comme combinaison linéaire de cv et on a :

$$\sum_{k\geq 2} \left(k q p^{k-1} + k p q^{k-1}\right) = q \times \left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) + p \times \left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{q}{q^2} - q + \frac{p}{p^2} - p = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$$

Comme $-q-p = -(p+q) = -1$

En particulier, X admet une espérance.

$[Y = k-1] = [X=k] \cap [Z=1]$ pour $k \geqslant 2$

Donc nous calculons $\mathbb{P}[[X=k]\cap[Z=1]]$ de façon très analogue à ce qui a été évalué pour $\mathbb{P}[[X=k]\cap[Y=1]]$

On obtient (en intervertissant les rôles de p et q)

$$\mathbb{P}[[X=2]\cap[Z=1]] = 2pq$$

$$\forall k \geqslant 3 \quad \mathbb{P}[[X=k]\cap[Z=1]] = qp^{k-1}$$

Conduisant naturellement à : $\mathbb{P}[Y=k-1] = qp^{k-1}$ pour $k\geqslant 3$

(d) Nous étudions la CVA de $\sum_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}[Y=k]$

soit encore $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kqp^k$ (au terme $k=1$ près)

Or $k\in\mathbb{N}^* \to kqp^k > 0$ donc l'étude de CV simple suffit. Nous avons $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kp^{k-1}$ CV comme série géométrique dérivée avec $p \in]0,1[$ de référence

D'où $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}[Y=k]$ converge et vaut :

$$\mathbb{E}(Y) = q(1+p) + \sum_{k=2}^{+\infty} kqp^k = q(1+p) + pq\sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1}$$

$$= q(1+p) + pq\left[\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right]$$

$$= q(1+p) + \frac{pq}{q^2} - pq = q + \frac{p}{q}$$

$$= \frac{q^2+p}{q} = \frac{(1-p)^2+p}{q} = \frac{p^2-2p+1+p}{q} = \frac{1-p+p^2}{q}$$

4/ Les rôles de Y et Z sont intervertis en échangeant p et q

On peut donc obtenir la loi de Z par une étude analogue à celle de Y et écrire :

$$\mathbb{P}[Z=1] = p(1+q) \text{ et } \forall k\geqslant 2 \quad \mathbb{P}[Z=k] = pq^k$$

L'étude de l'espérance s'effectue pareillement et conduit à écrire $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1-q+q^2}{p}$

Problème III

1/ La convention proposée permet d'écrire $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \Gamma(1)$ qui converge comme intégrale de référence.

Le calcul $\int_0^A e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^A = 1-e^{-A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1$

montre que $\Gamma(1) = 1$

2/ On calcule $\lim_{t\to 0^+} t^a = \lim_{t\to 0^+} e^{a\ln t}$ or $\lim_{t\to0^+} a\ln t = -\infty$

Car $a>0$ et donc, comme limite composée on trouve :

$$\lim_{t\to 0^+} e^{a\ln t} = 1$$ soit $t \mapsto t^a$ admet un prolongement par continuité en $t=0$ valant 0.

3/ Pour $x>1$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ s'étudie au moyen de $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

borne 0 : Nous avons vu en 2/ que $t\mapsto t^a$ admet un prolongement par continuité en $t=0$ pour $a = x-1>0$ ce qui est en accord avec $x>1$.

Ainsi $t^{x-1}e^{-t} \xrightarrow[t\to0^+]{} 0$ pour $x>1$ et donc $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge bien, comme assimilée à $\int_0^1 \tilde{f_x}(t)\,dt$

où $\tilde{f}_x : t \mapsto \begin{cases} t^{x-1}e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

est continue sur $[0;1]$ donc intégrable.

borne $+\infty$: $t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-t/2}e^{-t/2}$ or, on a

par croissances comparées $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{x-1}e^{-t/2} = 0$

donc $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{-t/2})$ et comme $t^{x-1}e^{-t} > 0$

au voisinage de $+\infty$, on a que $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

converge par critère de négligeabilité, comparant à

$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\,dt$ qui converge (de référence)

En conclusion, pour $x > 1$ on a bien $\Gamma(x)$ défini par

une intégrale convergente.

/ $x \in]0;1[\iff 1-x \in]0;1[$ d'où $t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$

pour $t > 0$. On a donc, au voisinage de 0^+ :

$t^{x-1}e^{-t} = \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ intégrable comme

$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge (de référence) pour $\alpha < 1$,

ayant $t^{x-1}e^{-t} > 0$ pour $t > 0$ et donc par critère

d'équivalence.

De ailleurs, on a comme en 3/ :

$t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-t/2}e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$

au voisinage de $+\infty$ permettant de dire que $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

converge. $\Gamma(x)$ est bien définie pour $x \in]0;1[$

5/ pour $x \leq 0$ on écrit $\alpha = 1-x \geq 1$

et $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ or $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge (de référence)

d'où, par positivité de $t^{x-1}e^{-t}$ pour $t > 0$ et

critère d'équivalence, on a $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ DV

6/ Γ est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en synthèse

de 2/ 3/ 4/

Propriétés de Γ

1/ Pour $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$

Or, sur $[0;A]$ avec $A > 0$ on a $u(t) = t^x$ (x fixé)

de prolongement C^1 avec $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v(t) = -e^{-t}$

de classe C^1 avec $v'(t) = e^{-t}$ de sorte que, par IPP :

$$\int_0^A t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^A + x\int_0^A t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad \left(\begin{smallmatrix}\text{et}\\ \text{linéarité}\end{smallmatrix}\right)$$

$$= -A^x e^{-A} + x\int_0^A t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Or $\lim\limits_{A \to +\infty} -A^x e^{-A} = 0$ par croissances comparées

et $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x)$

En conclusion on a bien $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

2/ Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Initialisation : pour $n = 0$ On a $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1$

et $0! = 1$ donc la proposition est initialisée

Hérédité : Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on ait $\Gamma(n+1) = n!$ vérifiée. Prouvons qu'alors $\Gamma(n+2) = (n+1)!$

On a $\Gamma(n+2) = \Gamma(n+1+1) = (n+1)\,\Gamma(n+1)$ par 1°/
$= (n+1)\; n! = (n+1)!$

par hypothèse de récurrence.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$

3°/ pour $k = 0$ nous identifions $(\ln t)^k$ et 1 pour $t \geqslant 0$
Nous traitons donc $k \in \mathbb{N}^*$.

Borne 0 : Commençons par remarquer que :

$$\lim_{t \to 0^+} (\ln t)^k t^\alpha = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln \tfrac{1}{x}\right)^k \left(\tfrac{1}{x}\right)^\alpha = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-\ln x)^k}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-1)^k \cdot \frac{(\ln x)^k}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} (-1)^k \cdot \left[\frac{\ln x}{x^{\alpha/k}}\right]^k$$

Or, si $\alpha/k > 0$ alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha/k}} = 0$ par croissances comparées d'où :

$\forall \alpha > 0 \quad \lim_{t \to 0^+} (\ln t)^k t^\alpha = 0$

Ainsi, si $x > 1$ alors $x - 1 > 0$ et donc $\frac{x-1}{2} > 0$

d'où $\lim_{t \to 0^+} (\ln t)^k \, t^{\frac{x-1}{2}} = 0$

$$\Rightarrow \left| (\ln t)^k t^{x-1} \right| = o\left(t^{\frac{x-1}{2}}\right)$$

Ce qui fait de $\int_0^1 \left|(\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}\right| dt$ une intégrale convergente comme $e^{-t} \underset{t \to 0^+}{\sim} 1$ et $\int_0^1 e^{-t} t^{\frac{x-1}{2}} dt$ converge d'après l'étude de Γ (partie 1.) par critère de négligeabilité. On a donc une intégrale qui CVA donc qui CV dans ce cas ($x > 1$)

Traitons le cas $x \in]0;1[$

Étudions l'intégrale $\int_0^1 \frac{|\ln t|^k}{t^\alpha} dt$:

Sur $]0;1]$ on a $\ln t \leqslant 0$ donc $|\ln t| = -\ln t$ et $|\ln t|^k = (-1)^k (\ln t)^k$

Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

Initialisation : si $k = 0$ alors on étudie $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ $(\alpha \in]0;1[)$ et on reconnait une intégrale de référence qui converge.

Hérédité : Supposons que, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $\int_0^1 \frac{|\ln t|^k}{t^\alpha} dt$ converge avec $\alpha \in]0;1[$ donné.

On va alors poser $\varepsilon \in]0;1[$ et examiner :

$$\int_\varepsilon^1 \frac{|\ln t|^{k+1}}{t^\alpha} dt = (-1)^{k+1} \int_\varepsilon^1 \frac{(\ln t)^{k+1}}{t^\alpha} dt$$ et réaliser une IPP avec :

$$\begin{cases} u(t) = (\ln t)^{k+1} \rightarrow u'(t) = (k+1) \frac{1}{t} (\ln t)^k \\ v(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Rightarrow v'(t) = t^{-\alpha} = \frac{1}{t^\alpha} \end{cases}$$

u et v étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\varepsilon;1[$ on a :

$$\int_\varepsilon^1 \frac{(\ln t)^{k+1}}{t^\alpha} dt = \left[\frac{(\ln t)^{k+1} t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 - \frac{k+1}{1-\alpha} \int_\varepsilon^1 t^{-\alpha} (\ln t)^k dt$$

Or, $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 t^{-\alpha} (\ln t)^k dt = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{t^\alpha} dt$ CV par hypothèse de récurrence et, par ailleurs :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} (\ln t)^{k+1} t^{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} (\ln \varepsilon)^{k+1} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$$

Comme déjà prouvé en 3°/ (et $1 - \alpha > 0$ avec $\alpha \in]0;1[$)

Ainsi $\int_0^1 \frac{(\ln t)^{k+1}}{t^\alpha} dt$ converge donc $(-1)^{k+1}\int_0^1 \frac{(\ln t)^{k+1}}{t^\alpha} dt$

ce qui donne la CV de $\int_0^1 \frac{|\ln t|^{k+1}}{t^\alpha} dt$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}$ $\int_0^1 \frac{|\ln t|^k}{t^\alpha} dt$ CV

Il vient que $\begin{cases} e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} 1 \\ e^{-t} > 0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 |(\ln t)^k t^{-\alpha} e^{-t}| dt$

et $\int_0^1 |(\ln t)^k t^{-\alpha}| dt$

sont de même nature par critère d'équivalence.

Or si $x \in]0;1[\Rightarrow 1-x = \alpha \in]0;1[$ et ainsi

$\int_0^1 |(\ln t)^k t^{-\alpha}| dt$ CV d'où $\int_0^1 (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$ CVA

dans ce cas.

Il reste à traiter le cas $x = 1$ qui revient, comme $e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} 1$

à étudier $\int_0^1 (\ln t)^k dt$ selon $k \in \mathbb{N}$

En observant que $\forall \varepsilon \in]0;1[$ on a $\int_\varepsilon^1 (\ln t)^{k+1} dt$

en utilisant une IPP

avec $\begin{cases} u(t) = (\ln t)^{k+1} \\ v(t) = t \end{cases}$ $= \left[t (\ln t)^{k+1}\right]_\varepsilon^1 - (k+1)\int_\varepsilon^1 t \frac{(\ln t)^k}{t} dt$

$\Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{k+1}{t}(\ln t)^k \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ $= \underline{\varepsilon(\ln \varepsilon)^{k+1}} - (k+1)\int_\varepsilon^1 (\ln t)^k dt$

de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ de limite nulle en 0^+

On forme une récurrence aboutissant à $\int_0^1 (\ln t)^k dt$ CV

pour tout $k \in \mathbb{N}$ (similaire au cas $0 < x < 1$) et on

critère d'équivalence sur $\int_0^1 |(\ln t)^k| e^{-t} dt$ donne la CVA

de l'intégrale étudiée.

borne $+\infty$. On fixe $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$

$\forall t > 1$ $|(\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}| = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} > 0$

$= (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t/2} \cdot e^{-t/2}$

or $0 \leq \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^k t^{x-1}}{e^{t/2}} \leq \lim_{t\to+\infty} \frac{t^x}{e^{t/2}} = 0$ par croissances comparées

donc $(\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} = o(e^{-t/2})$ et ainsi, comme $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t} dt$

converge comme intégrale de référence, on a, par critère de négligeabilité, que $\int_1^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$ CV

En conclusion, nous pouvons considérer que les valeurs de

$\int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$ pour $\begin{cases} k \in \mathbb{N} \\ x > 0 \end{cases}$ sont bien définies

et nous accepterons que $\Gamma^{(k)}(x)$ soient ces valeurs

4°/ Γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on peut chercher à étudier le signe de :

$\Gamma^{(2)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$ positif comme

intégrale (dans le sens croissant) d'une fonction produit de trois facteurs positifs. Donc $\forall x > 0$ $\Gamma''(x) > 0$

et ainsi Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

5°/ (a) Il suffit d'observer que ; avec $x \in [0;A]$ et $t \in \mathbb{R}$

$(f(x) + t g(x)) = f^2(x) + 2t f(x)g(x) + t^2 g^2(x)$ (id rmq)

$= |f(x)|^2 + 2t \cdot f(x)g(x) + t^2 \cdot |g(x)|^2$

et d'appliquer la linéarité de $\int$ (où $A > 0$ est donné fixe)

(b) $X^2 + \alpha X + \beta \geq 0$ sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta_p < 0$

$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 4\beta \leqslant 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 4\beta$ comme $P(x)$ unitaire

NB : si $\Delta = 0$ on a $P(X) \geqslant 0$ au sens large car admet une unique racine dite double.

(c) On a, pour $A>0$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^A \left(f(x) + t g(x)\right)^2 dx \geqslant 0 \quad \text{(intégrale d'un carré)}$$

$$\Leftrightarrow P(t) = t^2 + \left(\frac{2}{I}\int_0^A f(x) g(x)\, dx\right) t + \frac{1}{I}\int_0^A |f(x)|^2 dx \geqslant 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $I = \int_0^A |g(x)|^2 dx > 0$ car $g \not\equiv 0$

D'après 5/(b) on a donc $\frac{4}{I^2}\left(\int_0^A f(x) g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \frac{4}{I}\int_0^A |f(x)|^2 dx$

$$\Leftrightarrow \left(\int_0^A f(x) g(x)\, dx\right)^2 \leqslant I \int_0^A |f(x)|^2 dx = \left(\int_0^A |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_0^A |g(x)|^2 dx\right)$$

On traite le cas $\int_0^A |g(x)|^2 dx = 0$ sans souci : cela signifie que $g \equiv 0$ sur $[0;A]$ car g continue sur $[0;A]$

et ainsi : $\left(\int_0^A f(x) g(x)\, dx\right)^2 = 0 \leqslant 0$ c'est vérifié.

6/ on applique l'inégalité de Cauchy Schwarz établie en 5/ avec $f(t) = (\ln t)\, e^{-t/2} \cdot t^{\frac{x-1}{2}}$ et $g(t) = e^{-t/2} t^{\frac{x-1}{2}}$

$$\Rightarrow f^2(t) = (\ln t)^2 e^{-t} t^{x-1} \text{ et } g^2(t) = e^{-t} t^{x-1}$$

pour $x>0$ et $t \in]0,A]$ quitte à écrire $\int_\varepsilon^A$ et passer à $\lim_{\varepsilon \to 0^+}$ (les cv étant déjà établies)

7/ En passant à la limite lorsque $A \to +\infty$ depuis 6/ on reconnaît l'écriture de $T^{(1)}(x)^2 \leqslant T^{(2)}(x)\, T(x)$

Soit encore $T'(x) \leqslant T(x)\, T''(x)$ pour $x > 0$

Problème IV :

Partie I

1/ (a) f est différence de exp et ln (à cte multiplicative près, $e \simeq 2,718$ étant constante) donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On calcule :

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} \quad (x>0)$$

(b) On calcule $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x - \frac{e}{x} = 1 - \infty = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty - \frac{e}{+\infty} = +\infty \quad (\text{dans } \overline{\mathbb{R}})$$

$$f'(1) = e - \frac{e}{1} = 0$$

et ainsi ; on dresse :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

comme $\begin{cases} e^x > 0 \\ \frac{e}{x^2} > 0 \end{cases}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$

2/ Le signe de $f'(x)$ se déduit immédiatement de ce qui précède (en 2/) et on a :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x - e\ln x = 1 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - e\frac{\ln x}{e^x}\right) = +\infty(1 - e \times 0) = +\infty$$

comme $\ln x \underset{x \to +\infty}{=} o(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(e^x)$

$f(1) = e - e\ln 1 = e$; on peut donc dresser :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3/.

4/(a) u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence
et on a $\forall x>0 \quad u'(x) = f''(x) - 1$
or $f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > e^0 + 0 = 1$
si $x>0$ donc $u' > 0$ et ainsi u est strictement
croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = -\infty - 1 = -\infty$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty - 1 = +\infty$ on en déduit le tableau
suivant :

x	0		α		$+\infty$
u	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) u est continue, puisque dérivable, sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a
u change de signe, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc,
d'après le théorème de la bijection, on a l'existence
d'un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) = \alpha$
On évalue $u(1) = f'(1) - 1 = e - e - 1 = -1 < 0 < e^2 - \frac{e}{2} - 1 = u(2)$

partie II

5/ Nous posons P_n : $U_n \in [2;+\infty[$ pour $n\in\mathbb{N}$ et le
montrons par récurrence sur n :
Initialisation : $U_0 \in [2;+\infty[$ comme $u_0 = 2$.
P_0 est vérifiée.
Hérédité : Supposons que, pour $n\in\mathbb{N}$ donné, on ait
P_n vérifié. Alors $U_n \in [2;+\infty[$ et donc $U_n > 0$
Ce qui permet de calculer $f(U_n) = U_{n+1}$
Or, $e>2$ et $f(1) = e$ et f croît sur $[1;+\infty[$
donc $\forall x > 1 \quad f(x) \geq e > 2$ d'où $f(U_n) \geq 2$
Soit encore $U_{n+1} \geq 2$ et $U_{n+1} \in [2;+\infty[$
Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N} \quad U_n \in [2;+\infty[$
ceci permet bien aux termes U_n d'exister dans $\mathbb{R}$
pour $n\in\mathbb{N}$

6/(a) Nous avons g dérivable comme différence et
$\forall x>0 \quad g'(x) = f'(x) - 1$ dérivable
de mêmes variations que f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
Or $x \geq 2 \implies f'(x) - 1 = e^x - \frac{e}{x} - 1 \geq e^2 - e - 1 > 0$
d'où $g' > 0$ sur $[2;+\infty[$ et g est strictement croissante
sur $[2;+\infty[$. Par ailleurs, $f(\alpha) - \alpha = 0$ et $\alpha > 2$
d'où par croissance de g sur $[2;+\infty[$ on a :
$\forall x \geq 2 \quad g(x) \geq g(2) = f(2) - 2 > 0$
$\left(\text{comme } f(2) - 2 = e^2 - e\ln 2 - 2 > 7{,}3 - 2{,}8\times 0{,}7 - 2 > 7 - 5 > 0\right)$

En conclusion, sur $[2;+\infty[$, on a g strictement positive et croissante.

(b) On écrit $\forall n\in\mathbb{N}$ $f(u_n)-u_n>0$ comme $u_n\geq 2$ et d'après l'étude réalisée en (a).

Il en découle que $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}>u_n$ et ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7/ On note que $f(x)=x \iff f(x)-x=0$

$\iff x=\alpha<2$. Or, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ serait α par théorème de point fixe. Comme $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\geq 2$

On ne peut avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha<2$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, sans limite réelle donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

8/ Sans raison d'être en DZ – corrigé sur demande

9/ (a) $\ln$ est concave donc $\mathcal{C}_{\ln}$ est située sous chacune de ses tangentes et comme $2>0$, il en est de même pour $2\ln$.

Or $\mathcal{T}_2$: $y=\frac{2}{2}(x-2)+2\ln 2 = x+2\ln 2-2<x$

d'où $\forall x\geq 2$ $2\ln x<x$

exp est convexe, on raisonne similairement pour $\frac{1}{3}\exp$:

$\mathcal{T}_2: y=\frac{e^2}{3}(x-2)+\frac{e^2}{3}=\frac{e^2}{3}(x-1)$

Or $\forall x\geq 2$ $\frac{e^2}{3}(x-1)\geq x$

$\iff \frac{e^2-3}{3}x\geq\frac{e^2}{3}$, nous observons que

$\iff (e^2-3)x\geq e^2$

$e^2-3>4{,}3$ d'où $\forall x\geq 2$ $(e^2-3)x\geq 8{,}4>7{,}4$

et $7{,}4>e^2$ donc on conclut :

$\forall x\geq 2$ $\frac{e^2}{3}(x-1)\geq x$ et $\frac{e^x}{3}\geq x$

par convexité !

(b) De (a) on obtient $\forall x\geq 2$ $e\ln x\leq\frac{e}{2}x$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $-e\ln u_n\geq-\frac{eu_n}{2}$ (car $u_n\geq 2$)

De même on tire $\forall n\in\mathbb{N}$ $e^{u_n}\geq 3u_n=\frac{6}{2}u_n$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $e^{u_n}-e\ln u_n\geq\frac{6}{2}u_n-\frac{e}{2}u_n=\frac{6-e}{2}u_n$

et finalement $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}\geq\frac{6-e}{2}u_n$

(c) Une récurrence immédiate permet d'écrire, à partir de (b) que $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\geq\left(\frac{6-e}{2}\right)^n u_0>0$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $0<\frac{1}{u_n}\leq\frac{2}{(6-e)u_0}=\frac{1}{(6-e)^n}$

Or $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} q^n$ CV avec $0\leq q<1$ et

Comme $0<\frac{1}{6-e}<1$ on a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{6-e}\right)^n$ CV

et ainsi, par positivité de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et critère de comparaison on a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{u_n}$ CV

Partie III

10/ $\int_0^1 f(x)\,dx$ s'écrit $\int_0^1(e^x-e\ln x)\,dx$

Or $\int_0^1 \ln x\,dx$ CV (vu en problème III propriété de T-ex 3/)

et $\exp\in\mathcal{C}^0[0;1]$ donc par linéarité on a :

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx - e\int_0^1 \ln x\,dx$ CV comme

combinaison linéaire et $\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = \left[e^x - e(x\ln x - x)\right]_\varepsilon^1$

$= \left[e - e(0-1)\right] - \left[e^\varepsilon - e(\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon)\right]$

$= 2e - e^\varepsilon + e\,\varepsilon\ln\varepsilon - e\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 2e - 1$

ayant $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\ln\varepsilon = 0$ (limite de référence)

11°/ On a $\dfrac{e^x - e\ln x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1$

donc $e^x - e\ln x \sim e^x$ et $\int_1^{+\infty} e^x\,dx$ DV

On a clairement $e^x - e\ln x > 0$ pour x assez grand

et donc $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ DV par critère d'équivalence

12°/ $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{e^x - e\ln x}$ pour $x \geqslant 2$; ayant bien $f(x) > 0$

sur $[2, +\infty[$ par étude précédente.

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$ n'est impropre qu'en $+\infty$. Comme

$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ on a $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$ et $\int_2^{+\infty} e^{-x}\,dx$ CV

la positivité de f au voisinage de $+\infty$ fournit celle de $\frac{1}{f}$

et le critère d'équivalence permet de conclure $\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$ CV