.

Raisonnements Mathématiques

Récurrence

Exercice $\boxed{1}$ Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé. On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique de raison* r lorsqu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$$

1. Rappeler l'écriture explicite du terme général d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Démontrer par récurrence le résultat rappelé.

Exercice $\boxed{2}$ Soit $q \in \mathbb{R}$ fixé. On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *géométrique de raison* q lorsqu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = qu_n$$

1. Rappeler l'écriture explicite du terme général d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Démontrer par récurrence le résultat rappelé.

Exercice $\boxed{3}$ On note I_n le $(n+1)^{ieme}$ entier naturel impair (ainsi, $I_0 = 1$, $I_1 = 3$ etc...)
On désignera enfin par s_n la valeur de $I_0 + I_1 + \cdots + I_n$.

1. Calculer s_0, s_1, s_2 et s_3.
2. Quitte à calculer quelques termes de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supplémentaires, quelle conjecture peut-on effectuer sur les valeurs s_n (avec $n \in \mathbb{N}$) ?
3. Démontrer la conjecture par récurrence (en espérant qu'elle soit correcte...)

Exercice $\boxed{4}$ Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on définit la *factorielle* de n notée $n!$ par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} 0! = 1 & \text{(par convention)} \\ (n+1)! = (n+1) \times n! & \text{pour tout } \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Comment pourrait-on écrire $n!$ explicitement (pour $n \geq 2$) ?
2. Justifier que la suite des factorielles $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. L'est-elle au sens large ?
3. Etablir que la propriété $\mathcal{P}_n$: $n! \geq 2^n$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ est héréditaire mais non vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer l'ensemble des entiers naturels non nuls pour lesquels la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice $\boxed{5}$ On définit une suite arithmético-géométrique comme toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\exists\, (q; r) \in \mathbb{R}^2 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = qu_n + r$$

On pourra dire que q est la raison géomtrique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et r sa raison arithmétique (de façon un peu abusive cependant).
On désignera donc dans la suite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de raisons respectives q et r.

1. Peut-on dire d'une suite arithmético-géométrique qu'elle est arithmétique *et* géométrique ?
2. On suppose ici que $q \neq 1$.
   (a) Soit l défini comme étant l'unique solution réelle de l'équation $qx + r = x$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = q^n(u_0 - l) + l$.
   (b) *Application :* Déterminer explicitement le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 2v_n + 1$ pour tout entier naturel n.

(c) Application : Un placement en assurance-vie rapporte $2,5\%$ garanti annuel mais des frais de gestion fixes de 150 € sont déduits à chaque nouvelle année (y compris au moment du placement) et après calcul des intérêts.
Si M désigne, en euros, le montant du placement initial, exprimer en le capital total correspondant à ce placement après T d'années complètes écoulées.

3. On suppose ici que $q = 1$. Dans quelle situation se retrouve-t-on alors ?

Exercice $\boxed{6}$ On se propose de donner une fomule générale de calcul de la somme :

$$S_n = 0 + 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les premiers termes de S_0 à S_4.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice $\boxed{7}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On se donne une boîte contenant n pièces numérotées de 1 à n et on désigne par p_n le nombre de porte-monnaie distincts qu'il serait possible de former en sélectionnant des pièces de cette boîte.

1. Que vallent p_0, p_1 et p_2 ?
2. Conjecturer une expression explicite de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Etablir votre conjecture par récurrence (enfin, bon, si elle est valide...)
4. Que se passerait-il si les pièces étaient toutes de même valeur, indiscernables ?

Exercice $\boxed{8}$ Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on rappelle (ou découvre ?) que la somme $S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$ peut être obtenue au moyen de la formule :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Démontrer (ou redémontrer) ce résultat par une méthode de votre choix.
2. On pose $v_n = {S_n}^2$. Déterminer les valeurs de $v_0\ ;\ v_1\ ;\ \ldots\ ;\ v_4$ puis écrire v_n dans le cas général avec $n \in \mathbb{N}$.
3. On définit à présent C_n, pour $n \in \mathbb{N}$ comme :

$$C_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

Calculer quelques premiers termes de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'observez-vous ?

4. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

Exercice $\boxed{9}$ On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{4 - v_n} \quad \text{pour tout } \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. A quelle condition *tous* les termes de cette suite seraient-ils bien définis dans $\mathbb{R}$?
2. Etablir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \in [0; 2]$.

Exercice $\boxed{10}$ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a u_n bien défini et strictement positif.
2. Quelles sont les solutions réelles de l'inéquation $\ln(1 + x) < x$?
3. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autres types de raisonnement

Exercice $\boxed{11}$ Soit $p_1\ ,\ \dots\ ,p_r$ des nombres premiers distincts.

1. Démontrer que $N = p_1p_2\dots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des nombres p_i ($i \leq r$)
2. En déduire, par l'absurde, qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice $\boxed{12}$ Ecrire la contraposée de *f est une fonction telle que, dès lors que deux antécédants ont même image, alors ces antécédants sont égaux.*
Donner un exemple de fonction f qui valide cette assertion, puis un contre-exemple.

Exercice $\boxed{13}$ Quelle est la négation de *la fonction f est croissante sur I (un intervalle)* ?

Exercice $\boxed{14}$ *Il n'y a pas de fumée sans feu* dit-on. En termes d'implication, qu'écrire ?
☐ fumée $\Longrightarrow$ feu
☐ feu $\Longrightarrow$ fumée
☐ feu $\Longleftrightarrow$ fumée

Exercice $\boxed{15}$ Démontrer que $\dfrac{5}{17}$ n'est pas décimal.

Exercice $\boxed{16}$ Démontrer que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice $\boxed{17}$ Démontrer que, si $d = \dfrac{p}{q}$ est une fraction irréductible, alors d est décimal si, et seulement si, q n'admet que 2 ou 5 comme diviseurs premiers