.

Méthode et Formules pour Ari-Géo

Nous proposons dans ce document une synthèse de la méthode permettant d'obtenir le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite arithmético-géométrique. Celle-ci aboutit à la production d'une formule *pouvant être donnée et connue* mais sans que cela ne relève d'un caractère obligatoire.

Définitions, contexte

On considère donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique, les notations q et r désignant des réels donnés tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = qu_n + r$$

On rappelle que, si $q = 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et ce cas ne sera pas considéré pour l'exécution de la méthode proposée.

Méthode de traitement :

1° Equation (au point fixe)

On pose et résout l'équation $x = qx + r$ (rappelant que $q \neq 1$) : $x = qx + r \iff (1-q)x = r \iff x = \dfrac{r}{1-q}$.

On notera à présent $\alpha = \dfrac{r}{1-q}$ la solution de cette équation.

2° Suite Auxiliaire

On définit une suite auxilisaire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au moyen de $x_n = u_n - \alpha$. On démontre que cette suite est géométrique :
Calculons, pour $n \in \mathbb{N}$ donné :

$$\begin{aligned} x_{n+1} = u_{n+1} - \alpha &= (qu_n + r) - \frac{r}{1-q} \\ &= qu_n + \frac{r(1-q)}{1-q} - \frac{r}{1-q} = qu_n + \frac{-qr}{1-q} \\ &= q\left(u_n - \frac{r}{1-q}\right) = q\left(u_n - \alpha\right) = qx_n \end{aligned}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien géométrique de raison $q \neq 1$ et l'on a $x_0 = u_0 - \alpha$

3° Forme Explicite de la suite auxiliaire

Par le théorème caractéristique des suites géométriques on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = x_0 \times q^n = (u_0 - \alpha)q^n$

4° Forme Explicite de la suite originale

La définition de la suite auxiliaire peut se réécrire sous la forme $x_n = u_n + \alpha$, ce qui fournit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (u_0 - \alpha)q^n + \alpha$ permettant de conclure dans une situation numérique donnée.

formule générale (non attendue)

L'écriture générale de cette méthode permettrait d'aboutir, pour une suite arithmético-géométrique donnée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et vérifiant $u_{n+1} = qu_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 1$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(u_0 - \frac{r}{1-q}\right)q^n + \frac{r}{1-q}}$$