Etude d'une suite récurrente

Nous proposons ici un récapitulatif concernant les suites récurrentes définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Fonction de transition

On appelle *fonction de transition* la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Il est noter que toute suite n'est pas nécessairement de cette forme. L'existence d'une telle fonction n'est donc pas une évidence en soi.

- Il convient de vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie via f : pour cela, on doit établir que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n \in \mathcal{D}_f$, ce qui est très souvent établi par récurrence.
  Bien sûr, si $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique *a piori* réelle, il n'y aura aucun problèe.
- L'étude de f peut apporter des informations qu'il faudra interpréter avec précaution car l'erreur à éviter est de confondre variations et limites de f avec celles de la suite.

  On retiendra : "*L'étude de f n'induit PAS celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*" afin d'éviter toute confusion

Variations et limites de la suite

On rappelle qu'on peut définir $S_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) - x \geq 0\}$ et $S_- = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) - x \leq 0\}$. Déterminer ces ensembles revient à cherche le signe de $f(x) - x$ dont une expression sera calculée.

Notez qu'ainsi, $S_+ \cap S_-$ est l'ensemble des points fixes de f. La résolution de $f(x) - x \geq 0$ sera riche en information concernant la suite.

- Il est souvent utile de disposer d'un intervalle I pour lequel $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n \in I$. Un tel résultat est souvent établi par récurrence. Notez que les variations de f peuvent éventuellement être employées à cette étape, au niveau de l'hérédité.
- Si l'on a que $I \subset S_+$ ou encore $I \subset S_-$ alors les variations de la suite en découlent immédiatement : croissante dans le premier cas, décroissante dans le second.
- Les variations combinées à la connaissance de l'intervalle I pourront aboutir à l'usage d'un théorème de convergence type *monotonie bornée*.
  Attention ! ! la borne trouvée pour employer le théorème ne peut pas être considérée comme la limite à cette étape ! !

Pour finir, on peut utiliser le théorème de point fixe suivant (ou on établir un résultat analogue en employant un raisonnement similaire à celui de sa démonstration)

Théorème : (dit du point fixe) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I fermé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}\; u_{n+1} = f(u_n)$.*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (dans $\mathbb{R}$) et vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f, c'est-à-dire un réel l tel que $f(l) = l$.

Démonstration : On suppose donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge effectivement. Soit alors $l \in \mathbb{R}$ sa limite.
On a clairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$.
Comme $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n \in I$ et f continue sur I fermé, on peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) \in I$ soit encore :

$$l = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(l)$$