Compléments sur les limites de fonctions

Limites de fonctions et comparaisons

On notera $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f. On considèrera que $I \subset \mathcal{D}_f$ est un intervalle non vide. On désignera enfin par a un élément de I ou une de ses extrémités (adaptée à la situation).
Remarque : Par analogie, l'intervalle I remplace le "$n \in \mathbb{N}$" utilisé pour les suites.

Propriété (Ordre) :

Si f est croissante sur I et admet l pour limite en $+\infty$ alors $\forall x \in I \quad f(x) \leq l$

De façon analogue on a : (il n'est pas utile de toutes les écrire !)
1) • Si f est croissante sur I et admet l pour limite en a^- alors $\forall x < a \quad f(x) \leq l$
2) • Si f est décroissante sur I et admet l pour limite en $+\infty$ alors $\forall x \in I \quad f(x) \geq l$
3) • Si f est décroissante sur I et admet l pour limite en a^- alors $\forall x < a \quad f(x) \geq l$

Les propriétés suivantes sont rarement utiles et nécessitent de parcourir un graphique à contre-sens pour les visualiser :
4) • Si f est croissante sur I et admet l pour limite en $-\infty$ alors $\forall x \in I \quad f(x) \geq l$
5) • Si f est croissante sur I et admet l pour limite en a^+ alors $\forall x > a \quad f(x) \geq l$
6) • Si f est décroissante sur I et admet l pour limite en $-\infty$ alors $\forall x \in I \quad f(x) \leq l$
7) • Si f est décroissante sur I et admet l pour limite en a^+ alors $\forall x > a \quad f(x) \leq l$

Théorème (comparaison) :

Soient f et g deux fonctions telles que $\forall x < a \quad f(x) \geq g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a^-} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

De façon totalement analogue, ce théorème permet aussi de dire :
1)• Si, pour un certain $A \in I$ on a $\forall x \in [A; +\infty[\quad f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
2)• Si $\forall x < a \quad f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a^-} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
3)• Si, pour un certain $A \in I$ on a $\forall x \in [A; +\infty[\quad f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

et en renversant le sens de parcours du graphique cela donne :
4)• Si $\forall x > a \quad f(x) \geq g(x)$ $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
5)• Si, pour un certain $A \in I$ on a $\forall x \in]-\infty; A] \quad f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
6)• Si $\forall x > a \quad f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
7)• Si, pour un certain $A \in I$ on a $\forall x \in]-\infty; A] \quad f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Théorème (limites monotones) :

Soit f une fonction croissante et majorée par M sur $[A;+\infty[\subset I$.
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut un réel $l \leq M$.

De façon totalement analogue, ce théorème permet aussi de dire :
1)• Si f est croissante et majorée par M sur $[\alpha;a[\subset I$ alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ est un réel $l \leq M$.
2)• Si f est décroissante et minorée par m sur $[\alpha;a[\subset I$ alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ est un réel $l \geq m$.
3)• Si f est décroissante et minorée par m sur $[A;+\infty[\subset I$ (pour un certain A) alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est un réel $l \geq m$.

et en renversant le sens de parcours du graphique cela donne :
4)• Si f est croissante et minorée par m sur $]-\infty;A]\subset I$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ est un réel $l \geq m$.
5)• Si f est croissante et minorée par m sur $]a;\alpha]\subset I$ alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ est un réel $l \geq m$.
6)• Si f est décroissante et majorée par M sur $]-\infty;A]\subset I$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ est un réel $l \leq M$.
7)• Si f est décroissante et majorée par M sur $]a;\alpha]\subset I$ alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ est un réel $l \leq M$.
Pour le dernier théorème, on choisit regrouper tous les cas en un seul énoncé.

Théorème (des gendarmes) :

Soient f, g et h trois fonctions toutes définies sur l'intervalle I contenant a (ou pour lequel a est une extrêmité).

Si $\forall x \in I\ (x \neq a)\quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l \in \mathbb{R}$ (ou éventuellement en a^+ ou en a^-)
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ (ou éventuellement en a^+ ou en a^-).

Propriété (Monotonie non bornée) :

Si f est une fonction croissante et non majorée sur $I = [\alpha;a[$ (a pouvant être $+\infty$) alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

De façon analogue :
1)• Si f est une fonction décroissante et non minorée sur $[\alpha;a[\subset I$ (a pouvant être $+\infty$) alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
2)• Si f est une fonction croissante et non minorée sur $]a;\alpha]\subset I$ (a pouvant être $-\infty$) alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
3)• Si f est décroissante et non majorée sur $]a;\alpha]\subset I$ (a pouvant être $-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

A retenir : Nous avons pris soin d'écrire toutes les propriétés et tous les théorèmes possibles par analogie avec les énoncés provenant du cours sur les suites. Tous ne sont pas utiles en soi à apprendre.

Les résultats les plus importants sont : les théorèmes de comparaison et des gendarmes (dont on peut retenir un seul cas et vérifier que l'on sait retrouver les autres à partir de là) ainsi que les deux énoncés de théorèmes de limite monotone donnés en classe.