.

Suites et Sommations

Exercice $\boxed{1}$ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \geq 3 \;\; u_n > 1$.
2. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ est bien définie sur $\mathbb{N}$.
3. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique puis expliciter son terme général.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice $\boxed{2}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On note $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bien définie.
3. Etablir une relation entre v_{n+1} et v_n.
4. En déduire une forme explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, indiquer sa limite.

Exercice $\boxed{3}$ **(Monotonie)** Pour chacune des suites dont le terme général est donné, déterminer la monotonie éventuelle :

$$\mathbf{1.}\;\; u_n = \frac{2^n}{n+1} \qquad \mathbf{2.}\;\; v_n = \frac{\ln n}{n} \;\; (n \neq 0) \qquad \mathbf{3.}\;\; w_n = \frac{n!}{2^{n+1}} \qquad \mathbf{4.}\;\; t_n = 2n + (-1)^n \qquad \mathbf{5.}\;\; s_n = \frac{n!}{n^n} \;\; (n \neq 0)$$

Exercice $\boxed{4}$ **(Limites)** Pour chacune des suites dont le terme général est donné, déterminer la limite éventuelle (on supposera n assez grand) :

$$\mathbf{1.}\;\; u_n = \tfrac{n^2+4}{2n^3+n-1} \qquad \mathbf{2.}\;\; v_n = \tfrac{2\ln n}{n-2} \qquad \mathbf{3.}\;\; w_n = \tfrac{n^6}{2^{n+1}} \qquad \mathbf{4.}\;\; t_n = \tfrac{-3n+(-1)^n}{n+(-1)^n} \qquad \mathbf{5.}\;\; s_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

Exercice $\boxed{5}$ Etudier les suites (variations, convergence, limite éventuelle) des suites définies par récurrence suivantes :

$$\mathbf{1.}\;\; u_0 = \tfrac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n{}^2} \qquad \mathbf{2.}\;\; v_0 = 0 \text{ et } v_{n+1} = e^{v_n} \qquad \mathbf{3.}\;\; w_0 = 1 \text{ et } w_{n+1} = w_n + \tfrac{1}{w_n}$$

Exercice $\boxed{6}$ **(Sommations - Ecritures)**

Expliciter les sommations suivantes sans le symbole Σ (la lettre n désignera un entier naturel supposé arbitrairement grand) :

$$\mathbf{a)}\;\; \sum_{k=1}^{7} 2k - 3 \qquad \mathbf{b)}\;\; \sum_{k=3}^{10} k^2 - k + 1 \qquad \mathbf{c)}\;\; \sum_{k=0}^{n} k + 1 + (-1)^k \qquad \mathbf{d)}\;\; \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{n}$$

Exercice $\boxed{7}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Réécrire les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ :

$$\mathbf{a)}\;\; \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} + \cdots + \tfrac{-2n}{3} \qquad \mathbf{b)}\;\; \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{3^n} \qquad \mathbf{c)}\;\; 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} \qquad \mathbf{d)}\;\; \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2\sqrt{3}} + \cdots + \tfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

Exercice $\boxed{8}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ **(Sommation comme suite)** On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N} \;\; S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.

Etudier complètement la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice $\boxed{9}$ **(Calculs de Sommations)** Calculer explicitement, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs des sommations suivantes :

$$\textbf{a)}\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) \qquad \textbf{b)}\ \sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} \qquad \textbf{c)}\ \sum_{k=0}^{n}(k^2-1) \qquad \textbf{d)}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{4k+3}{n}$$

$$\textbf{e)}\ \sum_{k=0}^{2n-1}2^{-k+3} \qquad \textbf{f)}\ \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} \qquad \textbf{g)}\ \sum_{i=n}^{2n}k \qquad \textbf{h)}\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(k-i)$$

Exercice $\boxed{10}$ Etablir que, pour tout entier naturel non nul n on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k \times k!) = (n+1)! - 1$

Exercice $\boxed{11}$ Déterminer la limite (éventuelle) des suites données :

1. $u_n = 10^{-1} \times 1,001^n$ 2. $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n \neq 0)$ 3. $w_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$ $(n \geq 1)$ 4. $s_n = n4^{-n}$

5. $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{42^k}$ 6.$x_n = (-1)^n n + (-2)^n$ 7. $y_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{3n-5}$ 8. $z_n = \displaystyle\sum_{p=3}^{n}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{2}{3}\right)^p$

Exercice $\boxed{12}$ On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini à valeur dans $[0;4]$
2. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \leq 4$.
4. Etablir que $l = 4$.

Exercice $\boxed{13}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n^4}{n!}$.

1. Déterminer un entier naturel n_0 tel que :
$$\forall n \geq n_0 \quad n! \geq (n-n_0)^5$$
2. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$ constante fixée, la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-k)^5}{n^4}$
3. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice $\boxed{14}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_{n+1} = \left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)a_n$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$
2. En déduire le comportement asymptotique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice $\boxed{15}$ On définit une suite (s_n) par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

1. Démontrer que la suite (s_n) est monotone.
2. En déduire que (s_n) est convergente.
3. Mêmes questions avec la suite (t_n) définie par $t_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$