.

Suites et Sommations : corrigés

Exercice $\boxed{2}$ 1. Nous observons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie dès lors que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n \neq -\dfrac{1}{2}$ est vérifié. Nous proposons donc de démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n \in \mathbb{R}_+^*$

— Initialisation : Pour $n = 0$ on a, d'après l'énoncé, que $u_0 > 0$ donc la propriété est initialisée.

— Hérédité : Supposons que, pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $u_n > 0$. Alors :

$$u_n > 0 \ \Rightarrow\ 2u_n + 1 > 0 \ \ \Rightarrow\ \ \frac{u_n}{2u_n+1} > 0$$

d'où $u_{n+1} > 0$ et ainsi la propriété est héréditaire.

— Conclusion : On peut écrire que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n \in \mathbb{R}_+^*$ et ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Chaque terme v_n est bien défini dès lors que $u_n \neq 0$. Or, nous venons de voir que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, en particulier, que $u_n \neq 0$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous allons calculer :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n+1}{u_n} = 2 + \frac{1}{u_n} = 2 + v_n$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison $r = 2$ et on observera que $v_0 = \frac{1}{u_0}$

4. D'après les propriétés cartactéristiques des suites arithmétiques on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ v_n = v_0 + nr = \frac{1}{u_0} + 2n \quad \Rightarrow \quad u_n = \frac{1}{2n + \frac{1}{u_0}} = \frac{u_0}{2nu_0+1}$$

Enfin, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_0 + 1 = +\infty$ puisque $u_0 > 0$ on trouvera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice $\boxed{7}$ On propose une écriture possible en rappelant que plusieurs descriptions en Σ d'une même somme seraient admissibles.

$$\textbf{a)}\ \sum_{k=0}^{n+2} \frac{4-2k}{3} \qquad \textbf{b)}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \qquad \textbf{c)}\ \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k} \qquad \textbf{d)}\ \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p\sqrt{p+1}}$$

Exercice $\boxed{8}$ Il conviendra d'observer très vite que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ S_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$ ce qui ramène l'étude de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à celle de la suite géométrique de raison 2 et premier terme 2, à l'ajout de la constante -1 près.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante et positive, de limite $+\infty$.

Exercice $\boxed{13}$ 1. On propose la choix $n_0 = 10$ (qui n'est pas l'unique convenable) et on vérifie :
On a clairement, si $n \geq 10$ que $n - k \geq n - 10$ pour chacune des valeurs de k comprise entre 0 et 4 (entières). D'où :

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \geq (n-10)(n-10)(n-10)(n-10)(n-10) = (n-10)^5 \quad \text{(les facteurs sont tous positifs)}$$

Comme $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ si $n \geq 10$ le résultat attendu s'en suit.

2. Si k est une constante, observons que $(n-k)^5$ est un polynôme en n et donc, par la règle des monômes on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-k)^5}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

3. D'après 1. on a, à partir d'un certain rang n_0 que $\dfrac{(n-n_0)^5}{n^4} \leq \dfrac{n!}{n^4}$ or, d'après 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-k)^5}{n^4} = +\infty$. Donc par théorème de comparaison on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^4} = +\infty$. Par passage à l'inverse de la limite, on établit ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Exercice $\boxed{\textbf{14}}$ Démontrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

— Initialisation : Pour $n = 1$ on a, d'après l'énoncé, que $a_1 = 1$ et on calcule $\dfrac{1}{(1-1)!} = 1$.
L'assertion est établie au rang $n = 1$.

— Hérédité : Supposons que, pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $a_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$. Alors :

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) a_n = \frac{n+1}{n^2} \times \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n+1}{n \times (n-1)!} = \frac{n+1}{n!}$$

ainsi la propriété est héréditaire.

— Conclusion : On peut écrire que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$.

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs ($n = 0$ étant exclu) et pour $n \geq 2$ on a $\dfrac{n}{(n-1)!} \leq \dfrac{n}{(n-1)(n-2)}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{(n-1)(n-2)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ par la règle des monômes. Nous conclurons par le théorème des gendarmes (le minorant 0 peut être assimilé à une suite constante de limite nulle) : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0}$