corrigés

Exercice $\boxed{8}$ Pour s'(auto)entraîner

On fournit les résultats directement :

1. $\lim = e^2$ 2. $\lim = \frac{1}{5}$ 3. $\lim = a$ 4. $\lim = \dfrac{1}{2}$ 5. $\lim = \dfrac{n+1}{n}\alpha$ 6. $\begin{cases} 0 & \text{si } n \geq p \\ +\infty & \text{si } n < p \text{ et } n-p \text{ pair} \\ \text{undef} & \text{sinon} \end{cases}$

7. $\lim = \dfrac{3}{2}$ 8. $\lim = \sqrt{2}$ 9. $\lim = 1$ 10. $\lim = 0$ 11. $\lim = -\infty$ 12. $\lim = 1$

Les vérifications des résultats finaux pourront être faites à l'aide d'un logiciel de calcul formel

Exercice $\boxed{20}$ Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ polynôme de degré 3, confondu avec la fonction réelle $xP(x)$. On a $a \neq 0$ sinon P serait de degré strictement inférieur à 3. On a donc :

$$P(x) = 0 \iff x^3 + \frac{b}{a}x^2\frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Nous allons poser $\alpha = \dfrac{b}{a}$, $\beta = \dfrac{c}{a}$ et enfin $\gamma = \dfrac{d}{a}$ de sorte à définir $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ sur $\mathbb{R}$. D'après la règle des monômes, on peut écrire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
La fonction f est continue comme polynôme sur $\mathbb{R}$ et change de signe. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet (au moins) une solution réelle que l'on nomme racine puisque f est polynomiale. Ceci permet donc de conclure que P admet également au moins une racine réelle par l'équivalence fournie.

Nous pourrons observer que ce raisonnement est valable dès lors que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2p+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2p+1} = -\infty$, soit pour les polynômes de degré impair. Le lecteur avisé pourra dès lors rédiger la propriété et la preuve en résultant.