.

Autres fonctions : corrigés

Exercice $\boxed{7}$ A propos de la parité d'une fonction

1. Les parties $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_+$ ne sont pas symétriques par rapport à 0 comme $1 \in \mathbb{N}$ et $1 \in \mathbb{R}_+$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$ et $-1 \notin \mathbb{R}_+$.
   Par ailleurs, tout nombre x de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ admet son opposé dans le même ensemble (resp. $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$) faisant de ces ensembles des parties symétriques par rapport à 0.
   Enfin $x \in \mathbb{R}^* \implies x \neq 0 \implies -x \neq 0 \implies -x \in \mathbb{R}^*$. D'où $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0.
2. On peut éliminer les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$ et $\ln$ puisque leurs domaines de définition respectifs ne sont pas symétriques par rapport à 0.
   La fonction $\exp$ n'est ni paire ni impaire : on a $\exp(1) = e$ et $\exp(-1) = \frac{1}{e} =\neq -e$ (et différent de e lui-même).

   En prenant $x \in \mathbb{R}$, on a $(-x)^2 = x^2$ et $ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$ faisant des fonctions *carré* et ch, définies sur $\mathbb{R}$ entier, des fonctions paires. Par ailleurs, les calculs $a(-x) = -(ax)$ et $sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ démontrent que sh et $x \mapsto ax$ sont impaires.

   Enfin, $\mathbb{R}^*$ étant symétriques par rapport à 0, on peut observer que si $x \neq 0$ alors $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$ et donc la fonction inverse est impaire.
3. La fonction m est définie sur tout $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0 et, d'après la loi des signes, on obtient que m est paire (en tant que fonction) lorsque l'entier n est lui-même pair et que m est impaire (en tant que fonction) lorsque n est un entier impair.
4. - *fonction* f_1 :
     Le dénominateur $x^2 + 2 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On calcule alors :
     $$f_1(-x) = \frac{-ax}{(-x)^2 + 2} = -\frac{ax}{x^2 + 2} = -f(x)$$
     La fonction f_1 est donc impaire.
   - *fonction* f_2 :
     $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. On calcule alors :
     $$f_2(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 + |-x| = \frac{1}{2}x^2 + |x| = f_2(x)$$
     Donc f_2 est une fonction paire.
   - *fonction* f_3 :
     On doit au préalable vérifier pour quels valeurs de $x \in \mathbb{R}$ on a bien, d'une part, $e^x + 2 \neq 0$ et, d'autre part, $\dfrac{2e^x + 1}{e^x + 2} > 0$. La fonction $\exp$ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, ces conditions sont vérifiées pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. On peut alors calculer :
     $$f_3(x) = \ln\left(\frac{2e^{-x} + 1}{e^{-x} + 2}\right) = \ln\left(\frac{e^x\left(2e^{-x} + 1\right)}{e^x\left(e^{-x} + 2\right)}\right) = \ln\left(\frac{2 + e^x}{1 + 2e^x}\right) = -\ln\left(\frac{e^x + 2}{2e^x + 1}\right) = -f_3(x)$$
     La fonction f_3 est alors impaire.

(a) Soient p et q deux fonctions paires. Notons $\mathcal{D}_p$ et $\mathcal{D}_q$ leurs domaines respectifs : ils sont symétriques par rapport à 0. On peut définir $p+q$ sur $\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q$; prouvons que ce domaine est symétrique par rapport à 0 :

$$x \in \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q = \mathcal{D}_{p+q} \quad \Longrightarrow \quad -x \in \mathcal{D}_p \text{ et } -x \in \mathcal{D}_q \quad \Longrightarrow \quad -x \in \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q = \mathcal{D}_{p+q}$$

Nous calculons ensuite, pour $x \in \mathcal{D}_{p+q}$:

$$(p+q)(-x) = p(-x) + q(-x) = p(x) + q(x) = (p+q)(x)$$

par parité de p et de q. Ceci atteste de la parité de la fonction $p+q$.

Si p et q étaient deux fonctions impaires, nous noterions $\mathcal{D}_p$ et $\mathcal{D}_q$ leurs domaines respectifs : ils seraient symétriques par rapport à 0. On pourrait définir $p+q$ sur $\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q$; prouvons que ce domaine serait symétrique par rapport à 0 :

$$x \in \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q = \mathcal{D}_{p+q} \quad \Longrightarrow \quad -x \in \mathcal{D}_p \text{ et } -x \in \mathcal{D}_q \quad \Longrightarrow \quad -x \in \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q = \mathcal{D}_{p+q}$$

Nous calculerions ensuite, pour $x \in \mathcal{D}_{p+q}$:

$$(p+q)(-x) = p(-x) + q(-x) = -p(x) + (-q(x)) = -(p(x) + q(x)) = -(p+q)(x)$$

par imparité de p et de q. Ceci attesterait de l'imparité de la fonction $p+q$ dans ce cas : d'où la somme de fonctions impaires est une fonction impaire.

(b) Concernant le produit de p et q, on remarque que $\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q = \mathcal{D}_{pq}$ et donc un raisonnement similaire à celui de la somme s'applique. Nous calculons alors, pour $x \in \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q = \mathcal{D}_{pq}$:

$$(pq)(-x) = p(-x) \times q(-x) = p(x) \times q(x) = (pq)(x)$$

et le produit de fonctions paires est donc paire.

Dans le cas où ces fonctions seraient impaires, le raisonnement se limiterait au calcul suivant :

$$(pq)(-x) = p(-x) \times q(-x) = (-p(x)) \times (-q(x)) = +(pq)(x)$$

Mais la conclusion serait alors que le produit de deux fonctions impaires est en fait une fonction paire.

Nous invitons le lecteur à vérifier de lui-même que le produit d'une fonction paire par une fonction impaire est en fait une fonction impaire.