.

Fonctions usuelles - applications

Exercice $\boxed{2}$ *Remarque Initiale :* L'ensemble $2\mathbb{N}$ est en fait l'ensemble des entiers (naturels) pairs et l'ensemble $2\mathbb{N}+1$ celui des entiers (naturels) impairs.

1. Si $E = F = \mathbb{N}$ alors $f(n) = 2n - 1 \in 2\mathbb{N} - 1$ pour $n \neq 0$ et $f(0) = 0$. Or, $\forall n \geq 1 \quad f(x) \geq 1$, il s'en suit que $f(\mathbb{N}^*) = 2\mathbb{N}+1$. On s'en assure en considérant un entier impair $2k+1$ et établissant que $f(k+1) = 2k+1$.
   Par suite, $f(\mathbb{N}) = \{0\} \cup (2\mathbb{N}+1) \neq \mathbb{N}$ et la fonction f n'est donc pas surjective. En revanche, comme la fonction affine $n \mapsto 2n-1$ est strictement croissante et que $f(0) = 0 \notin f(\mathbb{N}^*)$ on obtient que f ainsi définie est injective.
   En particulier, f n'est pas bijective.
2. Par comparaison à l'étude précédante, f n'est pas plus surjective (on propose un domaine d'arrivée encore plus grand) et reste injective (le domaine de départ ne change pas)
   En particulier, f n'est pas bijective.
3. Cette fois-ci, la fonction f est définie sur tout $\mathbb{Z}$ donc le cas *sinon* dans sa définition doit s'étudier de façon plus approfondie :
   $$\forall n \leq 0 \quad f(n) = -2n \in 2\mathbb{N}$$
   De plus, si $k \in 2\mathbb{N}$ alors $\exists n \in \mathbb{N} \quad k = 2n$; considérons alors $k \in 2\mathbb{N}$ fixé et prenons $n \in \mathbb{N}$ associé. On a alors que $f(-n) = -(-2n) = k \in 2\mathbb{N}$ prouvant que tout élément de $2\mathbb{N}$ est atteint par f.
   Par ailleurs, nous avons déjà vu auparavant que $f(\mathbb{N}^*) = 2\mathbb{N}+1$ d'où $f(\mathbb{Z}) = f(\mathbb{Z}_-) \cup f(\mathbb{N}^*) = (2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N}+1) = \mathbb{N}$. La surjectivité est attestée.
   Pour l'injectivité, prenons $k \neq n$ deux entiers relatifs et posons l'équation $f(k) = f(n)$. Si k et n n'ont pas même signe, alors on a clairement que $f(k)$ et $f(n)$ n'ont pas même parité et ne peuvent donc être égaux : k et n ont donc même signe.
   Mais les fonctions $n \mapsto -2n$ et $n \mapsto 2n-1$ sont toutes deux strictement monotones sur $\mathbb{R}$ doù l'injectivité s'en suit et $f(k) = f(n)$ n'admet pour seule solution que $k = n$.
   La fonction f est, dans ce cas, injective et surjective donc bijective.
4. Dans ce dernier cas, on note immédiatement que $f(-1) = 2 = f(3/2)$ ce qui rompt la définition de l'injectivité.
   Par ailleurs, l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution puisque $2x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$ (ne correspond donc pas à l'expression employée pour calculer l'image de 0) et que $-2x = -1 \Leftrightarrow x = 1/2$ (ne correspond pas non plus l'expression employée pour calculer l'image de $1/2$). La fonction n'est donc pas non plus surjective dans ce cas.

<u>*A retenir :*</u> Les notions d'injectivité et de surjectivité dépendent drastiquement des domains de départ et d'arrivée d'une application ; on gardera donc à l'esprit que la seule donnée d'une expression de calcul général d'images ne suffit absolument pas à se prononcer sur ces questions.

Exercice $\boxed{6}$ L'hypothèse s'écrit donc $f(\mathbb{R}) = A = \{a_1 \dots a_n\}$ avec $n \geq 2$. Supposons que les éléments de A sont indexés selon l'ordre croissant et énumérés sans répétition : $a_i < a_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

Prenons alors le cas de a_1 et a_2 et considérons $\alpha = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \notin A$. Notons $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé de bornes x_1 et x_2 admettant a_1 et a_2 respectivement pour images par f (existent par hypothèse et sont distincts).

On raisonne ensuite par l'absurde : supposons f continue. On aurait alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, que :

$$\forall k \in [a_1; a_2] \, \exists x \in I \quad f(x) = k$$

Donc $\alpha \in A$ mais par construction de liste $(a_1 \; ; \; a_2 \; ; \; \dots \; ; \; a_n)$ ceci est absurde. Donc f n'est pas continue.

Exercice $\boxed{10}$ l'idée de cet exercice est d'utiliser une définition récurrente de la suite proposée afin de démontrer la plupart des résultats par récurrence.

1. Nous (re)définissons ainsi la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} T_1 & = \exp \\ T_{n+1} & = e^{T_n} = \exp \circ T_n \end{cases}$$

   Eventuellement, il serait possible de définir $T_0 = id_{\mathbb{R}}$ mais ce n'est nullement nécessaire.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   — Initialisation : Pour $n = 1$ on a $T_1 = \exp$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   — Hérédité : Supposons que, pour un entier $n \geq 1$ fixé, on ait T_n définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On aura alors T_{n+1}, composée de $\exp$ avec T_n, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   D'où l'hérédité.
   — Conclusion : Pour $n \geq 1$, on a donc T_n définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

3. Nous allons donc établir ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   — Initialisation : Pour $n = 1$ on a $T_1 = \exp$ donc $T_1' = \exp$ et ainsi $T_1' = \prod_{k=1}^{1} T_k$.
   La propriété est donc initialisée.
   — Hérédité : Supposons que, pour un entier $n \geq 1$ fixé, on ait :

$$T_n' = \prod_{k=1}^{n} T_k = T_1 \times T_2 \times \dots T_n$$

   Montrons qu'alors, cette formule est valable au rang $n+1$. Pour cela, calculons :

$$T_{n+1}' = (\exp \circ T_n)' = T_n' \times (\exp' \circ T_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} T_k\right) \times T_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} T_k$$

   comme $\exp' = \exp$ et par hypothèse de récurrence. L'hérédité est attestée.
   — Conclusion : Pour tout $n \geq 1$ on a

$$T_n' = \prod_{k=1}^{n} T_k = T_1 \times T_2 \times \dots T_n$$

   L'écriture explicite de T_n' donne :

$$T_n'(x) = e^x e^{e^x} e^{e^{e^x}} \dots e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}}$$

   On espère que le lecteur comprendra la forme *en escalier* de cette écriture.

4. Nous allons prouver par récurrence sur $n \geq 1$ que $T_n' > 0$ sur $\mathbb{R}$:
   — Initialisation : Pour $n = 1$ on a $T_1 = \exp$ donc $T_1' = \exp > 0$ sur $\mathbb{R}$.
   La propriété est donc initialisée.
   — Hérédité : Supposons que, pour un entier $n \geq 1$ fixé, on ait $T_n' > 0$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$T_{n+1}' = T_n \times e^{T_n}$$

   qui est donc le produit de deux fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$. Il vient que $T_{n+1}' > 0$ sur $\mathbb{R}$.
   L'hérédité est attestée.
   — Conclusion : Pour tout $n \geq 1$ on a $T_n' > 0$ sur $\mathbb{R}$
   Ainsi, les fonctions T_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, continues car dérivables (déjà établies) et par le théorème de la bijection, elles réalisent donc toutes des bijections de $\mathbb{R}$ dans $T_n(\mathbb{R})$.

5. Nous exhibons $L_1 = \ln$ et $L_2 = \ln \circ \ln$ de domaines respectifs $\mathbb{R}_+^*$ et $]1; +\infty[$.
   Une nouvelle récurrence établit que $\mathcal{D}_{L_n} =]T_{n-2}(1) \ ; \ +\infty[$ et par lecture inverse des variations et limites de T_n, on trouverait que L_n est strictement croissante, variant de $-\infty$ à $+\infty$ pour $n \geq 3$.