.

Etudes de Fonctions usuelles

Aspects Graphiques

Exercice $\boxed{1}$ A partir des données

1. Pour chacun des cas suivants, tracer une allure de courbe représentative possible pour la fonction f :
   (a) f définie sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
   (b) f définie sur $\mathbb{R}^*$ avec $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1$
   (c) f définie sur $]2;\ +\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to5} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{2}{5}$
   (d) f définie sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
2. Pour chacun des cas précédents, indiquer les éventuelles droites asymptotes horizontales ou verticales.

Exercice $\boxed{2}$ On se donne une fonction f ayant une limite infinie en un point $a \in \mathbb{R}$. La valeur a est-elle alors nécessairement une valeur interdite ? Si non, peut-on avoir $f(a) \in \mathbb{R}$?

Exercice $\boxed{3}$ Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en chaque point $a \in \mathbb{R}$ admet-elle alors une limite finie aux infinis ?

Exercice $\boxed{4}$ Esquissez l'allure de la courbe d'une fonction f admettant une tangente horizontale mais restant strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice $\boxed{5}$ Esquissez l'allure de la courbe d'une fonction f ayant une dérivée f' croissante mais étant elle-même décroissante sur $\mathbb{R}$ (strictement)

Aspects Calculatoires

Exercice $\boxed{6}$ Calculs de limites

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2}{-3x^3}$ 2. $\lim\limits_{x\to0} x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^6-5x^2+1}{12x^3+6x+1}$ 4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{7x-2}{\sqrt{x}+32}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{100}$ 6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x^2+4x+10}{7x^2-3x+110}\right)^2$ 7. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{x^3-64}{x^2-16}$ 8. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{(x-1)^4}{\sqrt{x-1}}\right)^3$

Exercice $\boxed{7}$ limites avec exponentielle et logarithme

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x - x$ 2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\ln x}$ 3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(1-x)-x}{x\ln x}$ 4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{1+\dfrac{1}{x}}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2}$ 6. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$ 7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{e^x\ln(x^5)}$ 8. $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

Exercice 8 $\bullet\Theta^{C\sharp}$ **Pour s'(auto)entraîner**

Calculez les limites proposées, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+x^4)(2+x)}{x+5x^5}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln a}{x-1}\right)^x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)-\ln(1-x)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^n}-\sqrt{1-x^n}}{x^p}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x-1$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^x$
10. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\ln x}$

Exercice 9 **Calculs de dérivées**

Pour chacune des expressions suivantes de la variable x, déterminez la dérivée (en x) associée en précisant les domaines de validité des formules utilisées (il n'est pas demandé d'étudier les prolongements éventuels) :

1. $\displaystyle\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$
2. $\displaystyle\sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}$
3. $\ln(4x+3)$
4. $\sqrt{x^2-2x-5}$
5. $\displaystyle\frac{x+2}{x^2\ln(x)}$
6. $\displaystyle\frac{1}{x\ln x}$
7. $\ln(\ln x))$
8. $\displaystyle\frac{e^{x+1}}{x+2}$
9. $\displaystyle\frac{\ln(3x+1)}{2x}$
10. $(x-2)^2\ln(x^3-8)$
11. $\displaystyle\frac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-5x+6}$
12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^k$
13. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
14. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-2^x}$
15. x^x

Etudes de fonctions communes

Exercice 10 Etudier complètement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}+\ln(2x)$

Exercice 11 Etudier complètement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}+2$

Exercice 12 Etudier complètement la fonction $h : x \mapsto (2x-1)e^{-x}$

Exercice 13 Etudier complètement la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$

Exercice 14 On donne une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ s'écrivant :

$$f(x) = ax+b+c\ln x$$

où a, b et c sont trois réels fixés. On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Par ailleurs, on sait que :

- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(1;1)$
- la courbe $\mathcal{C}$ possède une tangente horizontale en $x=2$
- f possède un maximum global de $2\ln 2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

1. Déterminer les valeurs de a, b et c puis dresser le tableau complet des variations de f.
2. La fonction f est-elle concave sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice $\boxed{15}$ On donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrivant :

$$f(x) = (ax+b)e^{-x}$$

où a et b sont deux réels fixés. On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Par ailleurs, on sait que :

- la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x = -2$
- la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées en $y = 2$
- la courbe $\mathcal{C}$ possède une tangente horizontale en $x = -1$

1. Déterminer les valeurs de a et b puis déterminer les variations de f.
2. Etablir que f possède un maximum global sur $\mathbb{R}$ dont on précisera la valeur (exacte) mais pas de minimum (ni global ni local).
3. Démontrer que la fonction f obtenue possède un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées exactes.

Exercice $\boxed{16}$ On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2(1-\ln x)$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.
Etablir que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et indiquer la valeur de $f'(0)$.

Exercice $\boxed{17}$ On définit la fonction h par $h(x) = x - \ln\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

1. Déterminer les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que h admet, pour sa courbe $\mathcal{C}_h$, une asymptote oblique $d : y = x - \ln 2$
3. Etudier les positions relatives de d avec $\mathcal{C}_h$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice $\boxed{18}$ Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 + 5x^2 - 2x + 1 = 0$

Exercice $\boxed{19}$ On pose l'équation (E) : $2 + \ln x \ = x^2$ d'inconnue réelle x.
Déterminer le nomnbre de solutions de (E) après avoir déterminé le domaine de validité de (E) (pour x)

Exercice $\boxed{20}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Démontrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle.

En combo avec des suites

Exercice $\boxed{21}$ **avec quelques notions d'étude de fonctions**
On se donne l'équation (E_n) : $x^n e^x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etablir que la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire qu'il existe une suite de réels positifs (α_n) définie par : α_n est la solution positive de l'équation (E_n) (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
3. Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n \leq 1$.
4. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [0;1] \quad f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$
5. En déduire la nature (convergence) de la suite (α_n).

Exercice $\boxed{22}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe de f_n.

1. Etudier la continuité de f_n, puis examiner sa dérivabilité.
2. Déterminer les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_n$ les unes par rapport aux autres.
3. (a) Etablir que, pour tout $m > 0$, l'équation $f_n(x) = m$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
   (b) Démontrer que la suite (x_n) est décroissante.
   (c) Montrer que (x_n) est une suite convergente de limite 1.

Etudes Locales

Exercice $\boxed{23}$ On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{x} \exp\left(x^{-1}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que f est continue à gauche en 0.
   (b) Déterminer la valeur de $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
2. Justifier que f est dérivable à gauche et déterminer $f'_g(0)$
3. (a) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
   (b) Dresser le tableau des variations complet de f.
   (c) La courbe représentative de f admet-elle des droites asymptotes ?

Exercice $\boxed{24}$ On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1. Vérifier que f est dérivable (à droite) en 0. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la droite tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de f en le point d'abscisse 0.
3. Démontrer que, pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes à la courbe de f
5. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ et tracer l'allure de la courbe de f ainsi que son/ses asymptote(s) et la tangente $\mathcal{T}$

Exercice $\boxed{25}$ Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition réel puis indiquer si l'on peut procéder à un prolongement par continuité (éventuellement unilatéral) :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 2. $g(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$ 3. $h(x) = x^x$ 4. $k(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$ 5. $m(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$