.

Etudes d'autres fonctions

Etudier d'autres fonctions

Exercice $\boxed{1}$ Fonction par morceaux On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 2 - ax & \text{si } x \in [0;5[\\ x^2 - x & \text{sinon} \end{cases}$$

où a désigne un paramètre réel.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de $a \in \mathbb{R}$ permettant à f d'être continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. On considère à présent f continue sur $\mathbb{R}_+$. Dresser le tableau de variations complet de f.
3. Esquissez une allure de la courbe notée $\mathcal{C}_f$.
4. Déterminer une équation de la tangente en $x = 1$ et représenter cette tangente sur votre schéma.

Exercice $\boxed{2}$ Fonctions Indicatrices Soit $I = [a;b]$ un intervalle (fermé borné) non vide de $\mathbb{R}$.
On définit la fonction $\mathbb{1}_{[a;b]}$ dite *indicatrice de* $[a;b]$ par :

$$\mathbb{1}_{[a;b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Dans cette question, on pose $a = -1$ et $b = 2$.
   (a) Tracer une représentation graphique de $\mathbb{1}_{[a;b]}$.
   (b) On pose $g(x) = x^2 + 2x - 8$ définie sur $\mathbb{R}$. Etudier les fonctions g et $g\mathbb{1}_{[a;b]}$
2. On revient au cas général :
   (a) A quelle condition sur $(a;b)$ la fonction $\mathbb{1}_{[a;b]}$ est-elle monotone ?
   (b) Justifier que, si g est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, alors

Exercice $\boxed{3}$ Fonctions Partie Entière et Partie décimale
On définit les fonctions *partie entière* et *partie décimale* sur $\mathbb{R}$ de la sorte :

i) Si $x \in \mathbb{R}$, alors la partie entière de x notée $\lfloor x \rfloor$ est un entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$
ii) Si $x \in \mathbb{R}$, alors la partie décimale de x notée $d(x)$ est la quantité $x - \lfloor x \rfloor$ (cette notation n'est en revanche pas conventionnelle).

1. Déterminer les valeurs de $\lfloor 3,1 \rfloor$; $\lfloor 3,14 \rfloor$; $\lfloor \pi \rfloor$; $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$; $\lfloor -1,52 \rfloor$ et $\lfloor 0 \rfloor$.
   En déduire les parties décimales correspondantes.
2. Etablir que $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (x = \lfloor x \rfloor)$ et que $\forall x \in \mathbb{R} \ \ 0 \leq d(x) < 1$
3. Déterminer les limites de la fonction partie entière en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Démontrer, par les définitions, que la fonction d n'admet pas de limite en chacun des infinis.
5. Soit $a \in \mathbb{Z}$ fixé. Comparer les valeurs de $\lim\limits_{x \to a^+} \lfloor x \rfloor$; $\lim\limits_{x \to a^-} \lfloor x \rfloor$ et $\lfloor a \rfloor$. Qu'observez-vous ?
6. Etablir que si $a \notin \mathbb{Z}$ admet n pour partie entière, alors $\lim\limits_{x \to a} \lfloor x \rfloor = n$.

Exercice $\boxed{4}$ les fonctions hyperboliques *(La connaissance des fonctions présentées dans ce problème n'est pas attendue)*

On définit deux nouvelles fonctions dites *sinus hyperbolique* et *cosinus* hyperboliques par :

$$sh : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \quad ; \quad ch : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

1. Vérifier que ces fonctions sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. En donner les dérivées.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer la valeur de $ch(x)^2 - sh(x)^2$. Qu'observe-t-on ?
3. Dresser les tableaux de variations des fonctions ch et sh.
4. Etudier les parités respectives des fonctions sh et ch.
5. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(ch(x) + sh(x))^n = ch(nx) + sh(nx)$
6. Etablir que sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Qu'en est-il pour ch ? (on pourra restreindre l'étude de ch à $\mathbb{R}_+$)
7. Déterminer, lorsque possible, $(sh^{-1})'(x)$ ainsi que $(ch^{-1})'(x)$
   les fonctions sh^{-1} et ch^{-1} sont nommées respectivement $argsh$ et $argch$

Exercice $\boxed{5}$ On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction *signe* notée sgn par :

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

On propose d'écrire : "*signe* est la dérivée de *valeur absolue*". Précisez en quels termes rigoureux il serait possible d'aboutir à ce résultat.

Exercice $\boxed{6}$ Déterminer la dérivabilité éventuelle sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes, puis exprimez la dérivée lorsque possible :

$$f : x \mapsto x|x| \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \qquad h : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$$

Exercice $\boxed{7}$ **A propos de la parité d'une fonction** On dit que $D \subset \mathbb{R}$ est *symétrique par rapport à 0* lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in D \ \Rightarrow \ -x \in D$$

Pour une fonction f dont le domaine $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, on dit que :
- f est paire si $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(-x) = f(x)$
- f est impaire si $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(-x) = -f(x)$

1. Les parties $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}_+$ sont-elles symétriqus par rapport à 0 ?
2. Parmi les fonctions usuelles suivantes, indiquer celles qui sont paires, impaires :

$$x \mapsto x^2 \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{x} \quad ; \quad x \mapsto ax \quad ; \quad x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad \cos \quad ; \quad \sin \quad ; \quad \ln \quad ; \quad \exp$$

3. Soit $m : x \mapsto x^n$ dite monôme de degré n (avec $n \in \mathbb{N}$). Déterminer la parité de m en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer les parités des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{ax}{x^2+2} \quad ; \quad f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + |x| \quad ; \quad f_3 : x \mapsto \ln\left(\frac{2e^x+1}{e^x+2}\right)$$

5. Etablir qu'une somme de fonctions paires est paires ; qu'une somme de fonctions impaires est impaire.
6. Etablir des propriétés similaires pour le produit de fonctions.