.

Applications

Exercice $\boxed{1}$ Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$ **2**. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array} \right.$

3. $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \right.$ **4**. $m : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y\ ;\ x-y) \end{array} \right.$

Exercice $\boxed{2}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On définit une application f de E dans F par :

$$f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 2n-1 & \text{si } n > 0 \\ -2n & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f dans chacun des cas suivants :
1. Si $E = F = \mathbb{N}$ **2.** Si $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{Z}$ **3.** Si $E = \mathbb{Z}$ et $F = \mathbb{N}$ **4.** Si $E = F = \mathbb{R}$

Exercice $\boxed{3}$ On définit la fonction f par :

$$f(x) = x + \ln(x-1)$$

1. Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.
2. Démontrer que f réalise une bijection de $]1\ ;\ +\infty[$ dans un intervalle à préciser.
3. Justifier l'existence de f^{-1} puis en étudier la dérivabilité. Déterminer la valeur de $\left(f^{-1}\right)'(e^2+3)$

Exercice $\boxed{4}$ Soit f une application de E dans F. Ecrire, avec les quantificateurs, la négation de f *est une injection*.

Exercice $\boxed{5}$ Soit f une application de E dans F. Ecrire, avec les quantificateurs, la négation de f *est une surjection*.

Exercice $\boxed{6}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soit f une application surjective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ de cardinal fini $n \geq 2$.
Etablir que f n'est pas continue.

Exercice $\boxed{7}$ On définit la fonction f comme $f(x) = x + \ln(1 + 3e^{-x})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $m = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
3. Justifier que f possède deux droites asymptotes : l'une, oblique, au voisinage de $+\infty$ et l'autre, horizontale, au voisinage de $-\infty$.
4. Vérifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m; +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice $\boxed{8}$ On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle à préciser.
2. Expliciter l'application réciproque de f. L'étudier.

Exercice $\boxed{9}$ Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que la fonction réalise une bijection de l'intervalle I proposé vers un intervalle J à préciser.
Si cela est possible, expliciter la fonction réciproque f^{-1}.

1. Fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ définie sur $I = [-1\ ;\ +\infty[$.
2. Fonction g définie par $g : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$ définie sur $I = \mathbb{R}$.
3. Fonction h définie par $h(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ sur $I = \mathbb{R}$
4. Fonction φ définie par $\varphi(x) = \ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)$ définie sur $I = [1\ ;\ +\infty[$

Exercice $\boxed{10}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On définit la fonction *Tower-n*, notée T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(x) = (\underbrace{\exp \circ \exp \circ \cdots \circ \exp}_{n \text{ fois}})(x)$$

1. Proposer une définition récurrente de T_n.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction T_n est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$
3. Etablir que :
$$T_n' = \prod_{k=1}^{n} T_k = T_1 \times T_2 \times \ldots T_n$$
La dérivée de la fonction *Tower-n* s'appelle *Stairs-n*. Avez-vous une explication à cela ?
4. On note $I_n = T_n(\mathbb{R})$. Démontrer que T_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Caractériser la bijection réciproque L_n de T_n. En particulier, on précisera son domaine de définition et les limites aux bornes de ce domaine.

Exercice $\boxed{11}$ On se donne un ensemble E et une application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (A;B) \in \mathcal{P}(E)^2 \quad A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

1° Démontrer qu'on a $f(\emptyset) = 0$
2° Etablir que pour $A \subset E$ et $B \subset E$ on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$
3° Etablir que pour $A \subset E$ et $B \subset E$ on a $A \subset B \ \Rightarrow \ f(A) \leq f(B)$
4° On se donne $E = [\![1\ ;\ 6]\!]$. Donner un exemple d'une telle fonction f.
Que peut-on dire si E est fini et $f(E) = 1$?