.

Ensembles et Dénombrement

Manipulations Ensemblistes

Exercice 1 On pose $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ et $B = \{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$. Décrire le produit cartésien $A \times B$ puis donner le nombre de parties de $A \times B$.

Exercice 2 Démontrer les relations ensemblistes suivantes :

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \quad = \quad (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

Exercice 3 $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a; b\}))$.

Exercice 4 Représenter graphiquement les solutions $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x-1)(y-2) & = & 0 \\ (x-2)(y-3) & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 5 $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Démontrer les relations ensemblistes suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Exercice 6 On se donne un ensemble E et une application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall (A; B) \in \mathcal{P}(E)^2 \quad A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

1° Démontrer qu'on a $f(\emptyset) = 0$
2° Etablir que pour $A \subset E$ et $B \subset E$ on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$
3° Etablir que pour $A \subset E$ et $B \subset E$ on a $A \subset B \ \Rightarrow \ f(A) \leq f(B)$
4° On se donne $E = [\![1\ ;\ 6]\!]$. Donner un exemple d'une telle fonction f.
Que peut-on dire si E est fini et $f(E) = 1$?

Dénombrement

Exercice 7 **Dénombrements en contexte**

Partie I : situations concrètes et précises

Pour chacune des situations suivantes, dénombrer les possibilités mises en jeu :

1. Une bibliothèque contient 50 bandes dessinées, 36 mangas et 67 livres de poche (ce n'est pas la mienne) tous rangés dans 3 compartiments, triés par numéros de série.
   Combien y-a-t il de façons de désorganiser cette bibliothèque de sorte à conserver les cloisonnements (BD avec BD, mangas avec mangas et livres de poche avec livres de poche) ?
2. J'ai 126 pots de peinture, de couleurs (très nuancées) distinctes. Combien de mélanges possibles, à quantités mélangées égales ?

3. On a mélangé deux jeux de 52 cartes identiques et on, tire 5 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir une couleur (c'est-à-dire cinq cartes de la même famille parmi $\spadesuit \heartsuit \diamondsuit \clubsuit$) ?
   Comparez avec celle d'obtenir une couleur au moyen d'un seul jeu unique (et classique).
4. Combien de façons de déployer 16 pièces sur les deux premières lignes d'un jeu d'échecs en choisissant les pièces comme on veut, d'une même couleur ? (autant de rois, dames, tours etc... que voulu)
5. Combien de façons de sélectionner 200 mots dans l'ordre alphabétique en parcourant un dictionnaire linguistique de 40000 ? Un même mot ne pourra pas être sélectionné plusieurs fois.
6. Un jeu employant des cartes est construit de sorte que chaque carte se voit un attribuée un “coût" (et un seul) et une ou plusieurs couleur(s).
   Sachant que les coûts sont représentées à l'aide d'un unique chiffre et qu'il y a cinq couleurs possibles, combien de cartes disctinctes peut-on former selon ces paramètres lorsque :
   (a) Chaque carte ne peut se voir attribuer qu'une et une seule couleur ?
   (b) Les cartes peuvent être monochromatiques ou bicolores ?
   (c) Les cartes peuvent se voir attribuer une combinaison quelconque de couleurs (sans tenir compte de leur ordre) ?

Partie II : généralisations

On reprend certaines des situations précédentes et chercher à les généraliser au mieux.

1. Une bibliothèque contient b bandes dessinées, m mangas et p livres de poche (il existe $(b; m; p) \in \mathbb{N}^3$ qui puisse être la vôtre) tous rangés dans 3 compartiments, triés par numéros de série.
   Combien y-a-t il de façons de désorganiser cette bibliothèque de sorte à conserver les cloisonnements (BD avec BD, mangas avec mangas et livres de poche avec livres de poche) ?
2. J'ai N pots de peinture, de couleurs (très nuancées) distinctes. Combien de mélanges possibles, à quantités mélangées égales ?
3. Combien de façons de sélectionner m mots dans l'ordre alphabétique en parcourant un dictionnaire linguistique de M ? Un même mot ne pourra pas être sélectionné plusieurs fois.
4. Un jeu employant des cartes est construit de sorte que chaque carte se voit un attribuée un “coût" (et un seul) et une ou plusieurs couleur(s).
   Sachant que les coûts sont représentées à l'aide d'un unique chiffre et qu'il y a c couleurs possibles, combien de cartes disctinctes peut-on former selon ces paramètres lorsque :
   (a) Chaque carte ne peut se voir attribuer qu'une et une seule couleur ?
   (b) Les cartes peuvent être monochromatiques ou bicolores ?
   (c) Les cartes peuvent se voir attribuer une combinaison quelconque de couleurs (sans tenir compte de leur ordre) ?

Exercice $\boxed{8}$ Une grille de Loto coûte 2 euros. Un joueur décide de cocher un numéro supplémentaire sur la grille principale. Le buraliste lui demande alors de payer 10 euros de surcoût.
S'agit-il d'un tarif honnête ? Un argument combinatoire est attendu.

Exercice $\boxed{9}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On jette deux dés à N faces supposés équilibrés.

1. Quelle est la probabilité, en additionnant leurs résultats, d'obtenir $N+1$?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?
3. On lance un troisième dé de même nature. Quelle est la probabilité d'obtenir avec ce dernier un score supérieur ou égal au résultat obtenu en sommant les valeurs obtenues aux deux premiers ?

indication : on ramène cet exercice à un simple problème de dénombrement

Exercice $\boxed{10}$ Démontrer qu'il n'existe aucune injection de $E \times E$ dans E lorsque E est fini de cardinal $n \geq 2$.
(*indication :* comptez...)

Exercice $\boxed{11}$ On dispose d'un damier carré de $n \times n$ cases ($n \in \mathbb{N}^*$). Les cases sont repérées, comme aux échecs. On appelle *diagonale* l'ensemble des cases ayant pour repère $A1$, $B2$ etc...

On dispose de jetons blancs et noirs à placer sur ce damier. Deux jetons de même couleur sont considérés indiscernables.

1. Combien y-a-t'il de cases sur la diagonale ? En déduire le nombre de façons de remplir la diagonale de jetons, tout en laissant les autres cases vides.
2. De combien de façons peut-on agencer ce damier au moyen des jetons de sorte que la diagonale soit un axe de symétrie du damier obtenu ?

   Comparer ce résultat avec le nombre total d'agencements du damier.

   Remarque : Il n'est pas interdit de laisser des cases vides.

Exercice $\boxed{12}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et x un élément n'étant pas dans E.

Dénombrer les surjections de E dans $\{0;1\}$ puis les sujerctions de $E \cup \{x\}$ dans E.

Exercice $\boxed{13}$ **D'après la saga *Les nains* de Markus Heitz**

Le nain Tungdil est un forgeron lettré qui a créé son propre système runique : en dessinant k nouveaux symboles distincts de runes, il crée des *mots runiques* en gravant plusieurs de ces symboles (éventuellement avec répétitions) consécutivement, comme pour des mots plus *classiques*.

souhaite se consituter un dictionnaire dans lequel il confinera chacun des mots runiques ainsi formés avec au plus N runes dans l'écriture de chaque mot.

1. Soit p un entier naturel inférieur ou égal à N. Combien de mots runiques à exactement p runes consécutives peut-on dénombrer dans ce système d'écriture ?
2. En déduire le nombre total de mots runiques que comportera le dictionnaire.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on définit une fonction f par $f(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} x^p$.
   (a) Démontrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $f'(x)$.
   (b) En déduire une expression explicite de la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\, x^p$ pour $x > 1$.
4. Au moyen de l'étude qui précède, indiquer combien de runes Tungdil devra dessiner au total pour créer son dictionnaire.