.

Systèmes et Matrices

Exercice $\boxed{1}$ Systèmes 2×2- résolution et réécriture

1. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases} 2x & -4y & =5\\ -3x & +7y & =-1\end{cases} \quad ; \quad (S_2):\begin{cases} 2x & +y & =2\\ 3x & -5y & =1\end{cases} \quad ; \quad (S_3):\begin{cases} 2x & -y & =-3\\ -6x & +3y & =9\end{cases}$$

2. Réécrire les systèmes précédants sous forme matricielle.

Exercice $\boxed{2}$ Systèmes 3×3- résolution et réécriture

1. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases} 2x & -y & +2z & =1\\ -3x & +2y & -z & =3\\ -x & +y & +z & =4\end{cases} \quad ; \quad (S_2):\begin{cases} 2x & +y & -z & =1\\ x & +3y & +2z & =4\\ x & +2y & +z & =2\end{cases} \quad ; \quad (S_3):\begin{cases} 2x & +y & -z & =1\\ x & -y & +z & =2\\ 4x & +y & +z & =3\end{cases}$$

2. Réécrire les systèmes précédants sous forme matricielle.

Exercice $\boxed{3}$ En vrac !

Réécrire chacun des systèmes suivants sous forme matricielle puis étudier l'ensemble de leurs solutions.

$$(S_1):\begin{cases} 2y-z+x & = & -2\\ y+x-2z & = & 0\end{cases} \quad ; \quad (S_2):\begin{cases} x+z & = & -1\\ x-2z & = & 0\\ z-x & = & 1\end{cases} \quad ; \quad (S_3):\begin{cases} 2x+3y & = & 3z\\ y & = & 3x-z\\ 2z+x & = & 3x-y\end{cases}$$

Exercice $\boxed{4}$ Un 4×4 pour la route

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x & +3y & -z & -2t & = & 4\\ x & +9y & -8z & -2t & = & -3\\ -x & +9y & +8z & -t & = & -2\\ x & -8y & & +t & = & 1\end{cases}$$

Exercice $\boxed{5}$ Systèmes à poser

Pour chacune des situations suivantes, décrire un système d'équations permettant de trouver les solutions puis le réécrire sous forme matricielle.

1. Trouver les polynômes P de degré 2 pour lesquels $P(k)=k$ avec $k\in\{1;2;3\}$
2. Déterminer les polynômes $Q(X)$ de degré au plus 3, factorisables par X, ayant -1 pour racine et tels que $Q(10)=4$
3. On donne la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices B de taille 3×3telles que $AB=O$

Exercice $\boxed{6}$ Abord de multiplication

Effectuez, lorsque possible, les calculs suivants :

1. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 10 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice $\boxed{7}$ $\bullet\Theta^{C\sharp}$ Multiplications matricielles

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 10 & 7 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Lorsque possible, pratiquer les produits matriciels proposés : AB ; BC ; CB ; CD ; AC ; BD et AD.
2. Comparer les possibilités d'effectuer les produits suivants : NP avec PN puis MQ avec QM *(on ne demande pas de les faire le cas échéant)*
3. Comparer les produits MN et NM (les résultats sont attendus)
4. Parmi les matrices X proposées, lesquelles vérifient $XQ = X$?
5. Parmi les matrices X proposées, lesquelles vérifient $QX = X$?

Exercice $\boxed{8}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

Exercice $\boxed{9}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis en déduire que $A^2 = A + 2I_3$
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}

Exercice $\boxed{10}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est inversible puis déterminer son inverse.
2. Déterminer l'ensemble des matrices M qui commutent avec A.

Exercice $\boxed{11}$ Expliciter la puissance $n$ième de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice $\boxed{12}$ On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^3 + 3A^2 + 3A$
2. La matrice est-elle inversible ? Si oui, en donner l'inverse.
3. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ où $X \in \mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$.

Exercice $\boxed{13}$ **Attila et les uns**

On appelle matrice Attila, notée H_n avec $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ envahie par les uns, c'est-à-dire vérifiant :

$$H_n : (i; j) \mapsto 1$$

1. Décrire la matrice H_3 et indiquer si elle est inversible ou non.
2. De façon générale, la matrice H_n est-elle inversible ? Explicitez ${H_n}^2$.
3. On pose $A_n = H_n - I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que A_n est, elle, inversible puis exprimer son inverse.

Exercice $\boxed{14}$ Soient $x_1;\ x_2; \ldots;\ x_n$ des réels ($n \in \mathbb{N}^*$) n'étant pas tous égaux.

On pose $M = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$, puis $A = {}^tMM$.

1. Quelles sont les dimensions de A ?
2. déterminer les solutions X de $AX = 0$ où X est une matrice colonne.

Démontrer que A est inversible pouis déterminer son inverse.

Exercice $\boxed{15}$ **Et maintenant, vous les préférez comment ?**

Résoudre les deux systèmes suivants :

$$S_1 : \begin{cases} \frac{1}{2}x & -\frac{4}{7}y & = & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{5}x & +\frac{2}{3}y & = & \frac{1}{7} \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x & +2y & = & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{9}x & -\frac{1}{7}y & = & 3 \end{cases} \qquad S_3 : \begin{cases} \frac{4}{7}x & +\frac{2}{9}y & = -\frac{2}{5} \\ -2x & +\frac{3}{8}y & = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Exercice $\boxed{16}$ **systèmes paramétrés**

Résoudre, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$:

$$(S_1) : \begin{cases} mx & +4y & = 5 \\ -3x & +my & = -1 \end{cases} \quad ; \quad (S_2) : \begin{cases} (1+m)x & +y & = 0 \\ 2x & +y & = 1+m \end{cases}$$