.

# Ensembles et Dénombrement

## Ensembles

**Exercice** $\boxed{3}$ De façon générale, si $E = \{a; b\}$ on a :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset \ ; \ \{a\} \ ; \ \{b\} \ ; \ \underbrace{\{a; b\}}_{=E}\}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble $U$ à 4 éléments et de façon générale, si l'on a $U = \{x; y; z; t\}$ alors :

$$\mathcal{P}(U) \quad =$$
$$\{\emptyset \ ; \ \{x\} \ ; \ \{y\} \ ; \ \{z\} \ ; \ \{t\} \ ; \ \{x; y\} \ ; \ \{x; z\} \ ; \ \{x; t\} \ ; \ \{y; z\} \ ; \ \{y; t\} \ ; \ \{z; t\} \ ; \ \{x; y; z\} \ ; \ \{x; y; t\} \ ; \ \{x; z; t\} \ ; \ \{y; z; t\} \ ; \ \{x; y; z; t\}\}$$

On obtient le résultat attendu par réécriture de chaque $x$ par $\emptyset$ en gardant l'esprit que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, en remplaçant $y$ par $\{a\}$ puis $z$ par $\{b\}$ puis $t$ par $E = \{a; b\}$ en gardant à l'esprit que $\{\{\star\}\} \neq \{\star\}$

**Exercice** $\boxed{5}$ On se propose d'effectuer les tables de vérité comparatives des équivalents logiques $A \vee (B \wedge C)$ et $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ pour la première égalité proposée :

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \wedge C$ | $A \vee (B \wedge C)$ | $A \vee B$ | $A \vee C$ | $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Ce qui atteste de l'égalité ensembliste associée à l'équivalence logique établie : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Une méthode complètement similaire permet d'établir $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

## Dénombrement

**Exercice** $\boxed{9}$ On notera $\mathcal{D}_N$ l'ensemble des $N$ faces d'un dé (générique) à $N$ faces numérotées et équilibré. Ainsi $(\mathcal{D}_N)^2$ désignera l'ensemble des résultats du lancer de deux tels dés.

1. Commençons par remarquer que chaque dé peut renvoyer une valeur entre $1$ et $N$ et donc les sommes possibles sont les entiers de $2$ à $2N$.

   Soit $k \in [\![2; 2N]\!]$. On observe que :

   $$k = (1 + (k-1)) = (2 + (k-2)) = \cdots = ((k-1) + 1) = (i + (k-i))$$

   et ce, pour n'importe quel $i$ compris entre $1$ et $2N$. On détermine les contraintes sur $i$ afin de compter les décompositions correspondant effectivement à une issue réalisable : elles s'écrivent $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq k - i \leq N$ la seconde se réécrivant $k - N \leq i \leq k - 1$ (par manipulation des inégalités)
   - Si $k \leq N+1$ les contraintes sont valides pour les valeurs de $i$ comprises entre 1 et $k-1$, ce qui conduit à exactement $k-1$ issues décomposant l'événement *obtenir une somme valant* $k$. On peut synthétiser les issues concernées :

   $$\{(1; (k-1)) \ ; \ (2; (k-2)) \ ; \ \ldots \ ; \ ((k-1); 1)\}$$

- Si $N+2 \leq k \leq 2N$ les contraintes sont valides pour les valeurs de $i$ vérifiant $1 \leq i \leq N$ et $k-N \leq i \leq k-1$. Or, si $k \geq N+2$ alors $N \leq k-1$ donc $i \leq N \Rightarrow i \leq k-1$ : il suffit donc de vérifier $i \leq N$ pour la majoration. Concernant la minoration, si $k \geq N+2$ alors $1 \leq k-N$ donc il suffit vérifier $k-N \leq i$. En conclusion, on obtient une issue pour chaque entier $i$ compris entre $k-N$ et $N$ soit exactement $N-(k-N)+1 = 2N+1-k$ issues. Comme $N+2 \leq k \leq 2N$ dans le cas que nous traitons, on obtient entre 1 et $N-1$ issues.

En conclusion, par équiprobabilités supposée (les dés étant équilibrés) sur l'univers $(\mathcal{D}N)^2$ des couples de résultats obtenus en lançant les deux dés, l'issue la plus probable dans l'univers $\mathcal{R} = [\![2; 2N]\!]$ des résultats de somme de ces lancers est celle pour laquelle le cardinal de l'événement associé dans $(\mathcal{D}_N)^2$ est le plus élevé, soit $k = N+1$ correspondant à $N$ issues d'après l'étude qui précède.

En particulier, la probabilité $\mathbb{P}$ sur l'univers $\mathcal{R}$ peut être décrite par :

| $k=$ | 2 | 3 | ... | $N$ | $N+1$ | $N+2$ | ... | $2N-1$ | $2N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $\frac{1}{N^2}$ | $\frac{2}{N^2}$ | ... | $\frac{N-1}{N^2}$ | $\frac{N}{N^2}$ | $\frac{N-1}{N^2}$ | ... | $\frac{2}{N^2}$ | $\frac{1}{N^2}$ |

*Remarque :* L'étude des VAR permettra d'obtenir les mêmes résultats avec davantage de légèreté, le vocabulaire et les notations qui y seront introduits correspondront alors aux éléments donnés ici.

2. L'espace de probabilités $\left((\mathcal{D}_N)^2 \; ; \; \mathcal{P}\left((\mathcal{D}_N)^2\right) \; ; \; \mathbb{P}_{DN}\right)$ permet de décrire l'événement considéré :

$$\text{Obtenir un double :}\{(1;1) \; ; \; (2;2) \; ; \; \ldots \; ; \; (N;N)\} = \{(i;i) \; ; \; 1 \leq i \leq N\}$$

de cardinal $N$. L'espace étant muni de l'équiprobabilité $\mathbb{P}_{DN}$ par hypothèse *les dés sont équilibrés* on peut en déduire que :

$$\mathbb{P}[\text{Obtenir un double}] = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{N}$$

On peut noter qu'il s'agit de la même valeur que celle d'obtenir $N+1$ en sommant les résultats des deux dés (qui constitue l'issue la plus probable de $\mathcal{R}$)

3. Soit $E$ l'événement dont on cherche la probabilité dans cette question. Ce dernier est un sous-ensemble de $\Omega = (\mathcal{D}N)^3$ (on lance trois dés).

Notons $k$ le résultat obtenu en sommant les deux premiers dés à $N$ faces. Si $k > N$ alors l'événement $E$ ne peut être réalisé. Nous pouvons donc considérer que $2 \leq k \leq N$. Dans ce dernier cas, il y a $N-k+1 = N-(k-1)$ valeurs possibles pour le troisième dé.

D'après l'étude vue en 1° si $k$ est compris entre 2 et $N$, il y a $(k-1)$ issues pour le couple de résultats des deux premiers dés conduisant à une somme de $k$. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\text{card}(E) &= \sum_{k=2}^{N}(k-1)\times(N-k+1) \\
&= N\sum_{k=2}^{N}(k-1) \quad - \sum_{k=2}^{N}(k-1)^2 \qquad \text{linéarité de } \Sigma \\
&= N\sum_{k=1}^{N-1}k \quad - \sum_{k=1}^{N-1}k^2 \qquad \text{glissement d'indices} \\
&= N\times\frac{N(N-1)}{2} - \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} \\
&= N(N-1)\frac{3N-2N+1}{6} = \frac{1}{6}N(N^2-1)
\end{aligned}$$

et ainsi la probabilité de $E$ (relativement à l'univers $(\mathcal{D}N)^3$ muni de l'équiprobabilité sur les triplets) est de :

$$\mathbb{P}_\Omega(E) = \frac{N(N^2-1)}{6N^3} = \frac{N^2-1}{6N^2}$$

**Exercice** $\boxed{\textbf{12}}$ Observons que toute application $f : E \longrightarrow \{0;1\}$ non constante est imémdiatement surjective. Or, il n'y a que deux applications non constantes de $E$ dans $\{0;1\}$ (une par constante de l'ensemble d'arrivée) et un total de $(\#\{0;1\})^{\#E} = 2^n$ applications donc finalement $2^n - 2$ applications surjectives de $E$ dans $\{0;1\}$.

Considérons maintenant l'ensemble $F = E \cup \{x\}$ de cardinal $n+1$ puisque $x \notin E$. Toute application $\varphi$ surjective de $F$ dans $E$ doit vérifier $\varphi(F) = E$, ce qui signifie qu'il a exactement deux éléments de $F$ qui auront même image par $\varphi$ (contrairement aux autres). Choisissons donc ces deux éléments dans $F$ : il y a $\binom{n+1}{2}$ choix possibles. Ce choix étant effectué, nous pouvons attribuer les $n$ images comme nous voulons : il y a $n!$ possibilités (on assimile les deux éléments ayant même image à un seul et on a donc besoin de choisir une bijection d'un ensemble de $n$ éléments dans un autre). Au total, nous dénombrons donc $\dfrac{(n+1)n}{2}n!$ applications possibles.