.

Espaces de Probabilités

Exercices Pratiques

Exercice $\boxed{1}$ On considère une famille dans laquelle on trouve 4 enfants. On suppose équiprobables les naissances entre filles et garçons.

1. Quelle est la probabilité que cette famille soit constituée de 4 filles ?
2. Vous rencontrez trois enfants de cette famille : ce sont des filles. Quelle estla probabilité que le dernier enfant à rencontrer soit également une fille ?
3. Le père de cette famille, un éminent docteur, vous présente trois de ses enfants, toutes des filles, comme étant les trois plus agées.
   Quelle est la probabilité que l'enfant restant, le plus jeune donc, soit aussi une fille ?
4. Un sociologue affirme que la situation la plus fréquente, en termes de répartition filles/garçons, est lorsqu'il apparaît trois enfants d'un même sexe et un de l'autre sexe. Qu'en pensez-vous ?

Exercice $\boxed{2}$ **Exo-politique** Sur Orion, deux partis politiques s'affrontent : les Rigos et les Tristos. On sait qu'il y a trois fois plus de partisans pour les Rigos que pour les tristos. Tout habitant d'Orion appartient nécessairement à un -et un seul- des deux partis.

Pour le prochain vote, on propose un projet de loi sur la PAX. D'après les estimations effectuées (sur lesquelles on s'appuiera), 60% des Rigos y sont favorables, 16% y sont opposés. Chez les Tristos, 68% s'opposent au projet et 20% sont sans opinion.

Vous rencontrez au hasard un individu d'Orion (quelle qu'en soit la probabilité, vous avez réussi) et vous lui demandez son opinion concernant le projet de loi PAX.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit *sans opinion* ?
2. L'individu vous a dit qu'il était favorable au projet de loi PAX. Quelle est la probabilité qu'il soit un Rigos ?
3. On suppose ici qu'il vous a répondu être opposé au projet de loi PAX. Quelle est la probabilité qu'il soit un Tristos ?

Exercice $\boxed{3}$ **Tests de dépistage avec vaccination**

On a mis au point un test de dépistage d'une certaine maladie qui réagit de la façon suivante :
- Le test réagit positivement pour un quart de la population totale.
- Le test réagit positivement dans huit cas sur dix chez les malades testés.
- Le test réagit positivement dans un cas sur dix chez les individus sains testés.

1. Quelle est la probabilité qu'un individu, de cette population, pris au hasard, soit atteint par cette maladie ?
2. On décide de vacciner un quart de la population. On dénombre $\frac{1}{12}$ de malades parmi les vaccinés mais dans la population des malades, il y a quatre non-vaccinés pour un vacciné..
   Quelle est ainsi la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?
3. Comparer les probabilités, pour un individu, de tomber malade avec, puis sans, vaccin.

Exercice $\boxed{4}$ **avec une suite**

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :
- Si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$, il a une probabilité $a \in]0;1[$ d'être en panne à l'instant n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)
- Si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il reste en panne avec probabilité 99% à l'instant n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$

1. Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_n en fonction de n et p_0.
3. Quelles sont les variations de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Etudier le comportement asymptotique de (p_n)

Exercice 5 Tous les matins, le docteur Sauce se demande s'il va manger des pancakes ou des céréales. Pour cela, et sachant qu'il n'optera que pour l'une et une seule de ces options de petit-déjeuner, il suit le protocole suivant :

- S'il a mangé des pancakes un matin, il décide de manger des céréales le lendemain s'il obtient *pile* en lançant une pièce équilibrée (il mangera de nouveau des pancakes sinon).
- S'il a mangé des céréales un matin, il lance deux pièces équilibrées : dans le cas où il obtient deux *faces*, il reprendra des céréales le lendemain matin (et il changera de petit-déjeuner sinon).

On notera C_n l'événement *le docteur Seuss mange des céréales au nième matin* et p_n la valeur de $\mathbb{P}(C_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On fixera que, pour $n = 0$, l'événement $\overline{C_0}$ est réalisé.

1. Déterminer p_0, p_1, $\mathbb{P}_{\overline{C_1}}(C_2)$ puis p_2.
2. De façon générale, donner les valeurs (en fonction de n) de $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$
3. Exprimer $\mathbb{P}(\overline{C_n})$ en fonction de p_n pour $n \in \mathbb{N}^*$
4. Etablir une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
5. Déterminer une expression explicite de la suite (p_n).

Exercice 6 On dispose de n urnes ($n \in \mathbb{N}^*$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires, supposées indiscernables au toucher. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 7 **La roulette russe en chocolat**

Une boite de chocolats *roulette russe* propose douze chocolats d'aspect identiques, l'un (unique)d'entre eux étant fourré avec un piment extra-fort. Douze personnes décident de se partager les chocolats.

Pour cela, ils se donnent un ordre arbitraire (personne p_1, puis personne p_2 etc...) dans lequel chacun va choisir un chocolat, le manger, puis laisser la personne suivante faire de même avec les chocolats restants.

Cette procédure est-elle équitable pour toutes ces personnes ?

Exercice 8 Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une noire, on l'enlève. Si on tire une blanche, on la retire et on ajoute une noire à la place.

Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite ?

Exercice 9 Une urne contient $N \geq 2$ boules blanches, $n \geq 1$ boules noires et $N-n$ boules rouges.

1. On tire trois boules avec remise.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage tricolore ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage bicolore ?
2. Mêmes questions avec un tirage sans remise.

Exercice 10 On lance au hasard une pièce équilibrée et on relève le résultat. On suppose que cette expérience peut être menée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants. On notera, pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n l'événement "obtenir face au $n$ième lancer" et Q_n l'événement "obtenir pile au $n$ième lancer". On désignera par u_n la probabilité qu'au cours de n lancers consécutifs, on n'ait jamais obtenu deux piles successifs.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer que la famille $(F_1\ ;\ Q_1 \cap Q_2\ ;\ Q_1 \cap F_2)$ forme un système complet d'événements.

3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$
4. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+2} \leq \frac{3}{4}u_n$
5. Etudier le comportement asymptotique de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte les résultats de cette étude.

Exercice $\boxed{11}$ On considère une infinité d'urnes (c'est très pratique...) désignées par $\mathcal{U}_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On sélectionne au hasard l'une d'entre elles de sorte que la probabilité de choisir l'urne $\mathcal{U}_n$ soit égale à 2^{-n}. De plus, l'urne $\mathcal{U}_k$ possède 2^k boules dont exactement une est blanche.

1. Vérifier que l'expérience proposée satisfait les conditions relatives à la construction d'un espace probabilisé.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche lorsque chaque tirage au sein d'une urne est fait selon une loi d'équiprobabilité ?

Exercice $\boxed{12}$ Un enfant jette un galet (plat) pour faire des ricochets sur la surface d'un lac.
On suppose que le galet effectue un n^{ieme} ricochet avec probabilité $\frac{1}{n}$ si l'on sait que ce galet a déjà effectué $n-1$ ricochets au préalable (avec $n \in \mathbb{N}^*$.)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité notée p_n que le galet coule après avoir effectué exactement n ricochets ?
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} p_k$ puis interpréter dans le contexte.

Exercice $\boxed{13}$ Au sein d'un réseau informatique, on procède à des transferts successifs d'un message d'un ordinateur à l'autre.
On suppose que chaque transmission a une probabilité $p \in]0;1[$ de se faire avec une erreur dans le message d'arrivée.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité notée p_n que le message parvienne sans erreur au n^{ieme} ordinateur successif.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$ puis interpréter dans le contexte.

Exercice $\boxed{14}$ On se donne une urne $\mathcal{U}$ contenant exactement une boule blanche. On réalise le protocole suivant :

```
On lance une pièce équilibrée
Tant que le dernier résultat de la pièce est FACE
        on ajoute une boule noire dans l'urne
        on relance une pièce équilibrée indépendamment des précédentes
On tire une boule de l'urne.
```

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0;1[$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ pour $x \in [0;1[$.
3. Justifier alors que le processus s'arrête presque sûrement lorsqu'il est appliqué.
4. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche en appliquant ce processus ?

Exercices théoriques (dont Démonstrations de résultats de cours)

Tous les résultats des exercices de cette section sont des propriétés (ou théorèmes) de cours qu'il vous faudra connaître.

Exercice $\boxed{1}$ En supposant connue la formule du crible dans le cas $n = 2$, démontrer la formule du crible dans le cas $n = 3$.
Prolongement : Ecrire la formule du crible pour $n = 4$. Cette formule ne sera pas à retenir.

Exercice $\boxed{2}$ (**Inégalité de Convexité pour les probabilités**)

Soit $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements de cet espace.

1. On définit une nouvelle famille d'événements par : $B_0 = A_0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_{n+1} = A_{n+1} \backslash \left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) = A_{n+1} \cap \overline{\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)}$$
   (a) Démontrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles.
   (b) Justifier que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\bigcup_{k\leq N} A_k = \bigcup_{k\leq N} B_k$
   (c) En déduire que $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$
2. On définit à présent, pour $n \in \mathbb{N}$, l'événement $C_n = \bigcup_{k\leq n} B_k$
   (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(C_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k)$
   (b) En déduire que :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)$$
   (on pourra utiliser le théorème de limite monotone)
3. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}(A_n)$
4. Conclure

Exercice $\boxed{3}$ (**Formule des probabilités totales**)

On suppose connue le théorème de limite monotone et son corollaire.

Démontrer la formule des probabilités totales (écriture par les intersections - sans conditionnement) dans le cas général.

Exercice $\boxed{4}$ Soit A, événement d'un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ de probabilité non nulle.

1. Démontrer que $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P}_A)$ est également un espace probabilisé, $\mathbb{P}_A$ désignant la probabilité conditionnelle sachant A déterminée à partir de $\mathbb{P}$ (définition supposée connue).
2. Justifier que l'on : $\forall E \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.
   A l'aide de la construction d'un contre-exemple, montrer qu'en revanche, la formule $\mathbb{P}_A(B) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$ est <u>invalide</u> en général.
3. Ecrire une formule de probabilités totales valable pour la probabilité $\mathbb{P}_A$
4. *Formule de Bayes*
   On se donne $(E_k)_{k\leq n}$ un système complet d'événements (fini) de l'espace $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$. Démontrer que, pour tout $B \in \mathcal{A}$ on a :
$$\forall i \leq n \quad \mathbb{P}_B(E_i) = \frac{\mathbb{P}(E_i \cap B)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k \cap B)}$$

Exercice $\boxed{5}$ (**Indépendance**) On considère deux événements A et B d'un même espace probabilisés $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$, de probabilités respectives non nulles. Démontrer l'équivalence :
$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$