.

Intégration

Exercice $\boxed{1}$ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-5)dx$ **2.** $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x}{2}(1-x)dx$ **3.** $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$ **4.** $\displaystyle\int_{0}^{2}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)dt$ **5.** $\displaystyle\int_{0}^{2}3e^{4x}dx$

6. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{3x}{(x^2+1)^2}dx$ **7.** $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{t^3}{t^4+2}dt$ **8.** $\displaystyle\int_{1}^{3}e^{1-2t}\,dt$ **9.** $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\frac{x+1}{x^2+2x}\right)dx$ **10.** $\displaystyle\int_{1}^{2}u\sqrt{u}\,du$

Exercice $\boxed{2}$ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}e^{3x-2}dx$ **2.** $\displaystyle\int_{0}^{a}\frac{x}{2}e^{-x^2}dx \quad (a\in\mathbb{R})$ **3.** $\displaystyle\int_{0}^{2}u\sqrt{u^2+1}\,du$ **4.** $\displaystyle\int_{e}^{e^n}\frac{1}{t\ln t}dt \quad (n\in\mathbb{N}^*)$

Exercice $\boxed{3}$ Calculer, à l'aide d'intégrations par parties :

1. $\displaystyle\int_{1}^{t}\ln x\,dx \quad (t>0)$ **2.** $\displaystyle\int_{0}^{1}x^2e^{-ax}dx \quad (a\in\mathbb{R})$ **3.** $\displaystyle\int_{0}^{2}t\ln(t+1)\,dt$ **4.** $\displaystyle\int_{0}^{x}(2t+1)e^{-t}dt \quad (x\in\mathbb{R})$

Théorème fondamental de l'intégration

Exercice $\boxed{4}$ Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive F s'annulant en 1 de la fonction $f : t\mapsto t^2\ln t$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice $\boxed{5}$ Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive F s'annulant en 0 de la fonction $f : t\mapsto 2te^{-t/2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice $\boxed{6}$ Soient a, b et c trois réels donnés. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, en fonction de a, b et c, l'expression de $F'(x)$. On notera f la fonction F' par la suite.
3. Justifier que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)e^{-x}$ où α, β et γ sont des constantes à expliciter en fonction de a, b et c.
4. Exprimer les constantes a, b et c en fonction de α, β et γ.
5. *Applications :*
   (a) Déterminer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-3x+1)e^{-x}$
   (b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2-3x^2)e^{-x}\,dx$

Exercice $\boxed{7}$ Le but de l'exercice est d'encadrer l'intégrale $I=\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^{-x^2}}{1+x}\,dx$. On ne cherchera pas à déterminer de primitive de la fonction intégrée.

1. Etablir que, pour tout réel $x\in[0;1]$ on a $1-x\leq e^{-x}\leq 1-x+\frac{x^2}{2}$
2. Ecrire alors un encadrement de e^{-x^2} pour $x\in[0;1]$

3. En déduire que :

$$\forall x \in [0;1] \quad 1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$$

4. A l'aide de la division euclidienne de X^4 par $1+X$, établir enfin l'encadrement :

$$\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24}+\frac{\ln 2}{2}$$

Exercice $\boxed{8}$ formules d'intégrations récurrentes

Calculer les intégrales suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$:

$$\mathbf{1.}\ \int_1^x \frac{\ln t\, dt}{t^n} \qquad \mathbf{2.}\ \int_0^x t^n e^{-t}\, dt \qquad \mathbf{3.}\ \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n\, dt \qquad \mathbf{4.}\ \int_0^1 t^n(1-t)^n\, dt \qquad \mathbf{5.}\ \int_1^{1+x} t^n \ln t dt$$

Exercice $\boxed{9}$ Démontrer que, pour tout $p > 0$ fixé, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^n e^{-pt}\, dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Exercice $\boxed{10}$ On définit une suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\, dx$ avec convention $I_0 = \displaystyle\int_1^e\, dx$.

1. Calculez I_0 et I_1
2. Pour $x \in]1;e[$ et $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$
3. En déduire les variations puis le signe de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. Etablir la relation de récurrence $I_{n+1} = e-(n+1)I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ (n+1)I_n \leq e$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
6. Quelle est la valeur de $nI_n + I_n + I_{n+1}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$? Calculez alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice $\boxed{11}$ Calculs d'intégrales dites généralisées

On écrit $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ lorsque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$. On dira alors que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. Dans le cas contraire, on dira que l'intégrale diverge.

1. Les intégrales suivantes convergent-elles ? Si oui, en donner la valeur.

$$\mathbf{1.}\ \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad \mathbf{2.}\ \int_0^{+\infty} te^{-2t}dt \qquad \mathbf{3.}\ \int_0^{+\infty} \frac{2}{x+2}dx \qquad \mathbf{4.}\ \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+\pi t^2}dt$$

2. Démontrer que si f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\text{pour tout } a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{+\infty} f(t)e^{-t}dt \ \text{ converge}$$

3. Etblir un résultat similaire si p est une fonction polynômiale réelle avec l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} p(t)e^{-t}dt$.
4. Déterminer la nature (convergence ou divergence) des intégrales suivantes :

$$\mathbf{1.}\ \int_0^1 x\ln x dx \qquad \mathbf{2.}\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dt \qquad \mathbf{3.}\ \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \mathbf{4.}\ \int_0^{+\infty} \frac{x-3}{x^2+x+1}dt$$

Pour aller un peu plus loin

Exercice $\boxed{12}$ **Sommes de Riemann**

Utiliser les sommes de Riemann pour calculer les limites suivantes :

$$\mathbf{1}.\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \qquad \mathbf{2}.\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \qquad \mathbf{3}.\ \lim_{n\to+\infty} n^{-a}\sum_{k=1}^{n}k^{a-1} \quad (a>1)$$

Exercice $\boxed{13}$ On donne la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \ \ v_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

1. Exprimer $\ln v_n$ en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$
2. Démontrer que $(\ln v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$