.

Suites et Sommations

Nous proposons dans ce document une synthèse des manipulations employées ou évoquées lors d'exercices ou d'exemples.

Dans toute la suite, les lettres n, a et b désignent des entiers naturels avec $a \leq b$ et les écritures u_k, v_k, u_i etc... renvoient à des termes de suites numériques (réelles).

• **Aspect récurrent**

Lorsque $n \geq a$ on a :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=a}^{n} u_k \implies S_{n+1} = u_{n+1} + S_n}$$

• **Linéarité**

Se décline en deux aspects :

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} (u_k + v_k) = \sum_{k=a}^{b} u_k + \sum_{k=a}^{b} v_k} \qquad \boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=a}^{b} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=a}^{b} u_k}$$

• **Changement / glissement d'indices**

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{k=0}^{b-a} u_{a+k}}$$

• **Invariance du choix d'indice (libre)**

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{i=a}^{b} u_i = \sum_{j=a}^{b} u_j = \dots}$$

⚠Attention ! Vous ne pouvez pas employer une lettre déjà prise dans l'expression, ainsi $v_n + \sum_{n=a}^{b} u_n$ ou encore $\sum_{n=0}^{n} u_n$ sont des exemples d'écritures à proscrire.

• **Regroupement/séparation de termes**

Lorsque $n > b \geq a$, on peut écrire :

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k + \sum_{k=b+1}^{n} u_k = \sum_{k=a}^{n} u_k}$$

On peut aussi parler de *relation de Chasles*

• **Renversement / Symétrie**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}}$$

Peut aussi être généralisé : $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{k=a}^{b} u_{(b+a)-k}$

Un exemple

Donnons-nous la somme connue $S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons donc calculer :

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n} k &= \sum_{k=0}^{n}(n-k) \quad \text{(renversement)} \\
\Rightarrow \ 2 \times S_n &= \sum_{k=0}^{n} k \ + \sum_{k=0}^{n}(n-k) \\
\Rightarrow \ 2 \times S_n &= \sum_{k=0}^{n}(k+n-k) \quad \text{(linéarité)} \\
\Rightarrow \ 2 \times S_n &= \sum_{k=0}^{n} n \\
\Rightarrow \ 2 \times S_n &= n \times \sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1) \quad \text{(linéarité)}
\end{aligned}$$

où l'on comprendra que $\sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n + 1$

A retenir : sommes particulières

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. Pour tout $q \neq 1$ on a :
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$
3. Si x est une constante réelle :
$$\sum_{k=a}^{b} x = (b - a + 1)x$$

Pour finir :

Ne pas hésiter à développer les Σ avec les $+ \ldots +$ pour bien comprendre les formules.

Donnons la formule de renversement $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$, elle cache juste l'égalité :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n \ = \ u_n + u_{n+1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 + u_0$$