.

Compléments d'analyse

Exercice $\boxed{1}$ **Exercice-Rappel** On définit une fonction PW sur $\mathbb{R}$ par :

$$PW(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Justifier que PW est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer la dérivée “par morceaux" de PW puis dresser son tableau de variations, avec limites aux bornes.
3. Démontrer que PW est bijective de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle à préciser. Expliciter ensuite l'application réciproque WP définie sur ce dernier intervalle.
4. Est-il possible de trouver un intervalle J contenant $]-1;+\infty[$ et strictement plus grand sur lequel PW est bijective ? Si oui, explicitez un tel intervalle.

Exercice $\boxed{2}$ Soit f une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si $I = [a;b]$, l'image de I par f est un segment (un intervalle fermé borné).
2. Au moyen d'exemples bien choisis, établir que si $I =]a;b[$, alors l'image de I est un intervalle pouvant aussi bien être ouvert, que fermé ou encore borné comme non borné.

Exercice $\boxed{3}$ **théorème des accroissements finis** *Le but de cet exercice est de donner une application du théorème de Rolle assez célèbre : le théorème des accroissements finis. Sa connaissance n'est plus attendue dans l'actuel programme de D2*
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ non vide et dérivable sur $]a;b[$. On notera $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$.
On définit φ sur $[a;b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

1. Justifier que φ est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et satisfait $\varphi(b) = \varphi(a)$.
2. En déduire que φ' admet un point d'annulation sur $]a;b[$.
3. Démontrer que la courbe de f admet, en un certain point C d'abscisse $c \in]a;b[$ une tangente parallèle à la droite (AB).
4. Conclure avec l'énoncé du théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in [a;b] \;\; f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

en précisant bien les hypothèses employées pour y aboutir.

Exercice $\boxed{4}$ **Formule de Taylor avec reste intégral** Le but de l'exercice est d'établir la formule de Taylor dite *avec reste intégral* :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \; + \; \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\, dx$$

où f est une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant les réels a et b.

1. Vérifier que la formule est vérifiée pour f dérivable sur I, dans le cas $n = 0$, quels que soient a et b de I.
2. Etablir que, pour $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I)$ on a, pour tout $(a;b) \in I^2$:

$$\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\, dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\, dx$$

3. En déduire une démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice $\boxed{5}$ **Inégalité de Taylor-Lagrange** On se place dans le même contexte que l'exercice précédent, dont le résultat est supposé à présent connu.

1. Démontrer que $|f^{(n)}|$ est majorée sur $[a;b]$, pour f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec $a < b$ dans I.
2. Simplifier, pour $(a;b) \in I^2$ et $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}\,dx$
3. En déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange :
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$$
4. *Application :* Démontrer que pour tout $(n;x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on a :
$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

On admettra que, par suite, on peut démontrer la ***Formule de Taylor-Young*** :
$$\forall x \in I \;\; f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \;\; + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$
pour $f \in \mathcal{C}^n(I)$ (où $n \in \mathbb{N}$) et $a \in I$ n'étant pas une borne de I, on a : pour une certaine fonction ε de limite nulle en 0.

Exercice $\boxed{6}$ On pose $\varphi : t \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

1. Déterminer le domaine de définition de φ et déterminer, selon $n \in \mathbb{N}$, si φ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \subset \mathcal{D}_\varphi$, le plus grand intervalle possible contenant 0.
2. Ecrire le développement de Taylor à l'ordre n de φ (au voisinage de 0) lorsque possible.

Exercice $\boxed{7}$ Déterminer les développements limités à l'ordre n, en a (notés $DL_n(a)$) demandés :

1. $DL_2(0)$ de $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ puis de $\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}$ et enfin de $\dfrac{\ln(1+x) - xe^x}{1+x}$
2. $DL_2(1)$ de $\dfrac{x\sqrt{x} - e^x}{\ln x}$ puis de $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^3-1}$

Exercice $\boxed{8}$ Calculer les limites suivantes (on pourra s'aider de développements limités) :

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) \quad \text{(b)} \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \quad \text{(c)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{e^{-\frac{\pi}{2}x^2} - e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

Exercice $\boxed{9}$ Déterminer les limites, lorsque x tend vers $+\infty$, des fonctions suivantes :

$$\text{(a)} \quad f(x) = x(\ln(1+x) - \ln(x)) \quad \text{(b)} \quad g(x) = \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$$
$$\text{(c)} \quad h(x) = x\left(x^{\frac{-1}{x}} - 1\right) \quad \text{(d)} \quad k(x) = x^2 \ln\left(\frac{1+x+x^2}{x^2}\right)$$

Exercice $\boxed{10}$ Déterminer un DL à l'ordre 3, au voisinage de 0 de $x \mapsto \int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$ après en voir justifié l'existence.