Loi Binômiale : Rappels

La présente fiche de synthèse vise à rappeler les connaissances des classes antérieures sur la loi binômiale. Cette dernière sera revue et approfondie dans le chapitre relevant des VAR.

1 Contexte

On appelle *épreuve de Bernoulli* une expérience aléatoire dans laquelle on distingue un événement particulier nommé *Succès*.
Par convention, on appellera *échec* l'événement complémentaire du *succès*.

On considère ensuite que l'on répète cette expérience à l'identique, de façons indépendantes, un certain nombre n de fois. On s'intéresse alors au *nombre de succès* obtenus.

Définition : On appelle *schéma de Bernoulli* la répétition d'une épreuve de Bernoulli dans des conditions permettant de supposer que :
- Les événements *succès* et *échecs* des différentes épreuves sont mutuellement indépendants
- La probabilité d'obtention de chaque succès est la même
- Le nombre d'épreuves réalisées est un entier naturel non nul

2 Loi de Bernoulli, loi binômiale

Soit $\mathcal{E}$ une épreuve de Bernoulli. On notera p la probabilité d'obtention d'un succès. On considère la variable aléatoire S qui vaut 1 si un succès est obtenu, et 0 sinon. On dit alors que la variable aléatoire S suit la loi de Bernoulli de paramètre p, et on note ce fait $S \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

On aura clairement le tableau de loi suivant :

s	0	1
$\mathbb{P}[S = s]$	$1-p$	p

Définition : Soit un *schéma de Bernoulli* de probabilité de succès p à n répétitions. La variable aléatoire X qui renvoie le nombre de succès de ce schéma suit une loi nommée *loi binomiale* de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n; p)$.
En particulier, on a $X(\Omega) = [\![0; n]\!]$

Exemple : On lance 10 dés à six faces bien équilibrés et on note X le nombre de “six" obtenus. On a alors que X suit la loi $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{6}\right)$.

Théorème : Soit X une variable aléatoire suivant la loi binômiale $\mathcal{B}(n; p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$.
Alors la loi de X est également donnée par :

$$\forall k \in [\![0; n]\!] \quad \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque : Il est intéressant de constater la ressemblance avec la formule du binôme de Newton, en écrivant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[X = k] = 1$.

Exercice : Calculer la probabilité d'obtenir deux “six" en lançant cinq dés classiques. *réponse :* $\dfrac{625}{3888}$

Propriété : Si X suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n; p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$, alors $\mathbb{E}[X] = np$

A noter : Ces résultats pourront être démontrés au chapitre traitant des VAR