.

Développements Limités

La connaissance de la formule de Taylor est incontournable ; savoir la restituer est un attendu.
Il conviendra de connaître les résultats de son application de le cas des fonctions usuelles pour $n = 2$ -conformément au programme actuel. La connaissance pour n général est conseillée sans être un attendu explicite.

Formule de Taylor avec "o"

Dans les cas où la formule de Taylor s'applique au voisinage de a, un réel, on peut retenir, avec h au voisinage de 0 que :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{f''(a)}{2}h^2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n \; + o\left(h^n\right)$$

Avec le symbole Σ, cela donne :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k \quad + o\left(h^n\right)$$

Ces deux résultats constituent alors le développement limité de $f(x)$ au voisinage de a à l'ordre n, avec $x = a + h$

Applications : développements à manipuler

On donne les développements de fonctions usuelles à connaître absolument sous forme développée avec $n = 2$. Il est attendu de savoir recourir à ces formules sans y être invité dans des contextes qui le nécessiteraient.
Tous les DL qui suivent sont donnés au voisinage de 0

1. *Exponentielle et logarithme* Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \; + o(x^n) \qquad \boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \; + o(x^n)$$

2. *famille géométrique* Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2} + \cdots + x^n \; + o(x^n) \qquad \boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2} + \cdots + (-1)^n x^n \; + o(x^n)$$

3. *Puissances* Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \; + o(x^n)$$

et retenir le cas $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2} + \cdots + \underbrace{(-1)^{n-1}\frac{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n n!}x^n \; + o(x^n)}_{\text{si } n>2}$$

Développements limités formels

On propose une écriture de ces mêmes développements avec le symbole Σ. Ces Développements ne constituent pas un exigible de restitution.

1. *Exponentielle et logarithme* Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad + o(x^n)} \qquad \boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad + o(x^n)}$$

2. *famille géométrique* Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k \quad + o(x^n)} \qquad \boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \quad + o(x^n)}$$

3. *Puissances* Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad + o(x^n)}$$

et retenir les premiers termes pour le cas $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2k-3)}{2^k k!} x^k \quad + o(x^n)}$$

Notes complémentaires

Certains DL se retrouvent à partir d'autres, par exemple, $\dfrac{1}{1+x}$ avec $(1+x)^\alpha$ en faisant $\alpha = -1$ ou encore $\ln(1+x)$ par primitive de $\dfrac{1}{1+x}$. Ne pas hésiter à vérifier rapidement en cas de doute. On peut aussi trouver $\ln(1-x)$ à partir de $\ln(1+x)$ en substituant x par $-x$.

Les DL peuvent s'ajouter, se soustraire, se multiplier ou encore se substituer dans d'autres à condition de vérifier la concordance des valeurs limites : ainsi, pour obtenir un DL de $f(u(x))$ pour x au voisinage de 0, si $u(x) \to a$ alors on devra savoir manipuler un DL de $f(a+h)$ et substituer h par $u(x) - a$