

Théorèmes fondamentaux de l'analyse

Ce document prolonge et complète les notions et résultats vus au chapitre II.

□ **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)** : L'image, par une application continue, d'un intervalle I est un intervalle.

□ **Corollaire du TVI** : Toute application f continue et strictement monotone d'un intervalle I réalise une bijection de I sur $f(I)$ qui est alors aussi un intervalle.

Remarque : Aussi appelé *théorème de bijection*.

Application Majeure : Dénombrement des solutions d'équations du type $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ et f continue à variations strictes par intervalles.

□ **Théorème de Rolle** : Soit $a < b$ deux réels et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ application continue sur $[a; b]$.
Si f est dérivable sur $]a; b[$ et $f(a) = f(b)$ alors :

$$\exists c \in]a; b[\quad f'(c) = 0$$

Le programme officiel stipule clairement *sans démonstration* pour ce théorème.

Conséquence Majeure : Théorème des accroissements finis.

▽ **Théorème des accroissements finis** : Soient $a < b$ deux réels et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ application continue sur $[a; b]$.
Si f est dérivable sur $]a; b[$ alors :

$$\exists c \in]a; b[\quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Conséquences Majeures : Caractérisation des fonctions constantes par dérivation nulle.

▽ **Inégalités des accroissements finis** : Soit f dérivable sur un intervalle I , à valeurs dans \mathbb{R} , avec $m \leq f' \leq M$ (bornée par m et M réels). Alors :

$$\forall (a; b) \in I^2 \quad a \leq b \quad \Rightarrow \quad m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

□ **Caractérisation des fonctions constantes par la dérivée** : Soit f dérivable sur un intervalle I . Alors :

$$f \text{ constante sur } I \quad \iff \quad f' \equiv 0$$

Application Principale : Deux fonctions ayant mêmes dérivées diffèrent d'une constante. Voir calcul intégral.

▽ **Formule de Taylor -avec reste intégral** : Soit f une application de $\mathcal{C}^{n+1}(I)$ contenant les réels a et b . Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Vocabulaire : $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ s'appelle le *reste intégral*. Pour une démonstration, voir *exercice* 4 -TD n°10.

Application Principale : Construction des développements limités et des équivalents par majoration du reste intégral.

Conséquence Importante : Dans le cas où $f = \exp$ et avec $b = x, a = 0$, on trouve : $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

□ **Formule de Taylor-Young** : Pour $f \in \mathcal{C}^n(I)$ (où $n \in \mathbb{N}$) et $a \in I$ n'étant pas une borne de I , on a l'existence d'une fonction ε de limite nulle en 0 vérifiant :

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

Application Principale : Formulaire des développements limités.