.

Formulaire

Le présent document a pour but de recenser les diverses formules (générales) les plus classiques (et attendues) en probablités (hors définitions).

Le symbole ○ fait figure de formule supposée déjà connue par le passé.
Le symbole □ mentionne les formules nouvelles dont la connaissance est attendue dès cette année.

Probabilités Générales

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ dans toute cette section.

○ **Probabilités uniformes :**
Si $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ fini, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$

○ **Formules du crible (Poincaré) - cas $n = 2$:**
Si A et B sont deux événements de $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

□ **Formules du crible (Poincaré) cas $n = 3$:**
Si A, B et C sont trois événements de $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Le cas n le plus général n'est pas un attendu du cycle préparatoire.

○ **Croissance des probabilités :**
Si $A \subset B$ sont deux événements de $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

□ **Théorème de limite monotone :**

— Pour toute suite croissante (au sens de l'inclusion) d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

— Pour toute suite décroissante (au sens de l'inclusion) d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

□ **Corollaire du Théorème de limite monotone :**
Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

- $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$
- $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$

□ **Convexité des probabilités :**
Pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements de $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

(le second membre pouvant être éventuellement $+\infty$).

- **Formule des probabilités totales (cas fini) :**
Soit N un entier naturel non nul. Si $(A_n)_{n\leq N}$ est un système complet d'événements, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$ on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n\leq N} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

Si, de plus, les A_n sont tous de probabilités respectives non nulles alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n\leq N} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$$

☐ **Formule des probabilités totales (cas général) :**
Soit $I \subset \mathbb{N}$ donné. Si $(A_n)_{n\in I}$ est un système complet d'événements, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$ on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Si, de plus, les A_i sont tous de probabilités respectives non nulles alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$

et chacune des ces sommes converge.

☐ **Formule des probabilités composées :**
Soient $A_1 \dots A_n$ des événéments tels que $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$ ne soit pas négligeable. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

☐ **Formule de bayes (cas fini) :**
Soit N un entier naturel non nul. Si $(A_n)_{n\leq N}$ est un système complet d'événements, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$ non-négligeable on a :

$$\forall i \leq N \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\displaystyle\sum_{n\leq N} \mathbb{P}(B \cap A_n)}$$

Si, de plus, les A_n sont tous non-négligeables alors :

$$\forall i \leq N \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\displaystyle\sum_{n\leq N} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{n\leq N} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B)}$$

☐ **Formule de bayes (cas général) :**
Soit $I \subset \mathbb{N}$ donné. Si $(A_n)_{n\in I}$ est un système complet d'événements, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$ non-négligeable on a :

$$\forall i \in I \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\displaystyle\sum_{n\in I} \mathbb{P}(B \cap A_n)}$$

Si, de plus, les A_n sont tous non-négligeables alors :

$$\forall i \in I \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\displaystyle\sum_{n\in I} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{n\in I} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B)}$$