.

Vocabulaire des Espaces de Probabilités

Nous proposons ici un lexique spécifique aux espaces de probabilités. Les définitions ne sont pas triées en ordre alphabétique mais plutôt dans un ordre qui suppose connu les définitions précédantes pour chaque nouvelle lecture de définition.

Le symbole ∇ mentionne les notions n'étant pas explicitement au programme mais dont la connaissance permet une meilleure compréhension des notions.

Expériences Aléatoires

On admet que le lecteur comprend la locution *Expérience Aléatoire*. On considérera comme expériences aléatoires :

- Les lancés de dés, peu important leur nombre de faces, ce que l'on y inscrit ou s'ils sont (ou non) pipés
- Le fait de tirer une (ou plusieurs) carte(s) d'un jeu mélangé
- Tirer une (ou plusieurs) boule(s) indiscernables au toucher depuis une urne
- Tout *choix au hasard* parmi diverses possibilités
- Selectionner aléatoirement un individu d'une population

Vocabulaire des modèles d'expériences aléatoires

☐ **Issue** : Toute possibilité observable résultant d'une expérience aléatoire.

☐ **Univers** : Un univers $\mathcal{U}$ est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Il dépend donc de l'expérience considérée.
On utilise aussi souvent la lettre Ω pour désigner un univers dans ce contexte.

☐ **Evénement** : Partie E de l'univers $\mathcal{U}$ recevable dans l'étude.

☐ **Evénement atomique (ou élémentaire)** : Evénement à une seule issue (un singleton).

☐ **Evénement impossible :** L'ensemble $\emptyset$ dans le contexte des expériences aléatoires.

☐ **Evénements incompatibles :** Deux événements A et B vérifiant $A \cap B = \emptyset$
On pourra dire *compatibles* dans le cas contraire.

☐ **Evénement contraire :** L'ensemble A^c noté $\overline{A}$ dans le contexte des probabilités modélise l'événement contraire de A.

∇ **Tribu $\mathcal{A}$ des événéments :** Ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ de tous les événements associés à l'expérience d'univers Ω. Elle doit vérifier les propriétés axiomatiques suivantes :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\Omega \in \mathcal{A}$
- Stabilité par unions dénombrables :
$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$
c'est-à-dire que toute union d'une suite d'événements est un événement
- Stabilité par passage au complémentaire :
$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$$
c'est-à-dire que tout complémentaire d'un événement est un événement.

∇ **Espace probabilisable :** Le couple $(\Omega\ ;\ \mathcal{A})$ formé par l'univers Ω et la tribu $\mathcal{A}$.

☐ **Probabilité :** Application $\mathbb{P}$ définie sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements d'un univers Ω (en fait, une tribu) à valeurs dans $[0;1]$ vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements pris dans $\mathcal{A}$ *deux à deux incompatibles* on a :

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[A_k] = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[A_k]$$

☐ **Espace probabilisé :** Le couple $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega\ ;\ \mathcal{A})$

☐ **Système Complet d'Evénements (cas fini) :** Toute liste d'événements $A_1; \ldots; A_n$ d'un même univers Ω vérifivant :

1. La réunion de tous ces événements est Ω
2. Ces événements sont deux à deux incompatibles.

☐ **Système Complet d'Evénements (cas général) :** Toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un même univers Ω vérifiant :

1. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$
2. $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

Il s'agit du vocabulaire employé en probabilités pour désigner une partition de l'ensemble Ω.
Remarque : On peut remplacer "$n \in \mathbb{N}$" par $n \in I$ (ou $i \in I$ en exploitant un indice i) avec $I \subset \mathbb{N}$.

Vocabulaire associé au calcul de probabilités

Dans cette section, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ et on notera A un événement de cet espace de probabilité non nulle.

☐ **Probabilités élémentaires :** Valeur de probabilité d'un événement élémentaire.

☐ **Evénement négligeable :** Evénement de probabilité nulle.
Attention ! Ce n'est pas nécessairement $\emptyset$.

☐ **Evénement presque sûr :** Evénement de probabilité 1 (un).
Attention ! Ce n'est pas nécessairement Ω.

☐ **Equiprobabilité (cas Ω fini) :** Lorsque Ω est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, parle d'équiprobabilités lorsque $\mathbb{P}$ renvoie les mêmes valeurs pour chaque événement élémentaire :

$$\forall(\omega_1\ ;\ \omega_2) \in \Omega^2 \quad \mathbb{P}[\{\omega_1\}] = \mathbb{P}[\{\omega_2\}]$$

☐ **Probabilité Conditionnelle (sachant A) :** Il s'agit de la probabilité notée $\mathbb{P}_A$ vérifiant :

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}_A(E) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(A)}$$

☐ **Evénements indépendants :** On dit que B est indépendant de A lorsque $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
Remarque : Par convention, on pourra dire que tout événement B est indépendant de $\emptyset$.

☐ **Indépendance mutuelle d'événements :** Pour $(E_n)_{n\in I}$ avec $I \subset N$, famille d'événements de $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$, on parlera d'indépendance mutuelle lorsque toute sous-famille finie $(E_{i_1}\ ;\ E_{i_2}\ ;\ \ldots\ ;\ E_{i_n})$ vérifie :

$$\mathbb{P}\left(E_{i_1}\ \cap\ E_{i_2}\ \cap\ \ldots\ \cap\ E_{i_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}[E_{i_k}]$$