

Corrections TD 7 - Systèmes et Matrices

Exercice 7

1. Multiplications matricielles

(a) Par commodité, nous écrivons $\mathcal{M}_{a;b}$ à lieu de $\mathcal{M}_{a;b}(\mathbb{R})$ et on note $\mathcal{M}_{a;b} \times \mathcal{M}_{b;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{a;c}$ le typage fonctionnel du produit matriciel réalisé (avec a, b et c trois entiers naturels non nuls.)

On étudie une par une les matrices fournies en les proposant comme facteur gauche et en listant les facteurs droites possibles. A cette fin, notons que :

$$A \in \mathcal{M}_{2;2} \quad B \in \mathcal{M}_{2;3} \quad C \in \mathcal{M}_{3;3} \quad D \in \mathcal{M}_{3;4} \quad M \in \mathcal{M}_{4;4} \quad N \in \mathcal{M}_{4;4} \quad P \in \mathcal{M}_{5;3} \quad Q \in \mathcal{M}_{3;4}$$

- *Etude avec A à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{2;2} \times \mathcal{M}_{2;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{2;c}$
Les seules matrices convenant sont A et B. Ainsi, on peut réaliser les produits $A \times A = A^2$ et AB .
- *Etude avec B à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{2;3} \times \mathcal{M}_{3;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{2;c}$
Les seules matrices convenant sont C, D et Q. Ainsi, on peut réaliser les produits BC , BD et BQ .
- *Etude avec C à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{3;3} \times \mathcal{M}_{3;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{3;c}$
Les seules matrices convenant sont C, D et Q. Ainsi, on peut réaliser les produits C^2 , CD et CQ .
- *Etude avec D à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{3;4} \times \mathcal{M}_{4;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{3;c}$
Les seules matrices convenant sont M et N. Ainsi, on peut réaliser les produits DM et DN .
- *Etude avec M à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{4;4} \times \mathcal{M}_{4;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{4;c}$
Les seules matrices convenant sont M et N. Ainsi, on peut réaliser les produits M^2 et MN .
- *Etude avec N à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{4;4} \times \mathcal{M}_{4;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{4;c}$
Les seules matrices convenant sont M et N. Ainsi, on peut réaliser les produits N^2 et NM .
- *Etude avec P à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{5;3} \times \mathcal{M}_{3;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{5;c}$
Les seules matrices convenant sont D, Q et C. Ainsi, on peut réaliser les produits PD , PQ et PC .
- *Etude avec Q à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{3;4} \times \mathcal{M}_{4;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{3;c}$
Les seules matrices convenant sont M et N. Ainsi, on peut réaliser les produits QM et QN .

On peut ainsi remarquer que, parmi les 64 couples de matrices potentiels, seuls 19 correspondent à des produits réalisables, 4 d'entre eux étant des carrés.

(b) D'après la question précédente, seuls AB , BC et BD sont réalisables. On en donne les matrices résultantes :

$$AB = \begin{pmatrix} -38 & -35 & 12 \\ 14 & 7 & -4 \end{pmatrix} ; \quad BC = \begin{pmatrix} 16 & 14 & -9 \\ 47 & 57 & -16 \end{pmatrix} ; \quad BD = \begin{pmatrix} -18 & 7 & -3 & 1 \\ -44 & -6 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

(c) On donne donc :

$$MN = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 6 & 38 \\ 25 & -2 & -11 & 32 \\ 8 & 21 & 35 & 59 \\ 23 & 4 & 8 & 19 \end{pmatrix} ; \quad NM = \begin{pmatrix} 6 & 32 & 5 & -11 \\ 16 & 18 & -28 & 19 \\ 9 & -8 & -5 & -3 \\ 52 & 25 & -34 & 44 \end{pmatrix}$$

et on remarque que $MN \neq NM$, la multiplication de matrices n'est pas commutative.

(d) Parmi les matrices X proposées, lesquelles vérifient $XQ = X$?

(e) Parmi les matrices X proposées, lesquelles vérifient $QX = X$?