.

Devoir n°2

Durée : 2 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème 1 : son nom est tangente hyperbolique

Partie I

On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$ par :

$$th : x \mapsto th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Etudier cette fonction et donner son tableau de variation en précisant les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Tracer une représentation graphique de th sur $\mathbb{R}$
3. Soient x et y deux réels donnés. Démontrer que l'on a la relation suivante :

$$th(x+y) = \frac{th(x) + th(y)}{1 + th(x)th(y)}$$

Partie II

Dans la suite du problème, on étudie les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x)| < 1 \ \text{ et } \ f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$$

1. Montrer que $f0) = 0$
2. On suppose que f est continue en 0. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que f est dérivable en 0. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f est impaire.

BONUS Montrer que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+$.

Dans la suite, on admet que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+$.

5. Etablir que f est monotone.
6. La fonction f étant fixée, on définit sur $\mathbb{R}$ une fonction g par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

Montrer que, pour tout nombre réel a, la rapport $\dfrac{g(x+a)}{g(x)}$ est indépendant de x.

7. En déduire une expression de g puis de f.

Problème II : Un 4×4 qui renverse les racines

On considère la matrice A définie comme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer A^2
   (b) En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}
2. Soient a et b deux réels. On note M la matrice définie par $M = aI_4 + bA$.
   (a) Démontrer que :
   $$M^2 = -(a^2 + b^2)I_4 + 2aM$$
   (b) En déduire que, si $(a; b) \neq (0; 0)$ alors la matrice M est inversible.
   (c) Exprimer l'inverse M^{-1} sous la forme $\alpha I_4 + \beta A$ (où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$).
3. *Application :* donner l'inverse de :

$$H = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Problème III : Newton a le sum

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^k$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Vérifier que, pour $k \in \{0; 1; 2\}$, $u_k = 4^k$
   Dans la suite du problème, on se propose de montrer la relation $u_n = 4^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit n un entier naturel fixé.
   Montrer que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$:
   $$\binom{2n+2-k}{n+1} = \binom{2n+1-k}{n} + \binom{2n+1-k}{n+1}$$
4. En déduire :
   $$u_{n+1} = 2^{n+1} + \binom{2n+1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1-k}{n} 2^k \quad + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{n+1} 2^k$$
5. Etablir que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1-k}{n} 2^k = 2u_n - 2^{n+1}$
6. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{n+1} 2^k = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \binom{2n+2}{n+1}\right)$
7. Etablir que $\displaystyle\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$
8. Déduire des questions précédentes que $u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{u_{n+1}}{2}$ puis que $u_{n+1} = 4u_n$ pour tout entier naturel n.
9. Conclure en exprimant explicitement le terme général u_n.