Corrigé DL
Devoir n°2

Lycée Turgot

2022-2023

Exercice I

partie I

1) On observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x}+e^{-x}>0$

Comme somme d'exponentielles (éventuellement composée) et Ainsi th est de classe $\mathcal{C}^2$ comme quotient et somme sur $\mathbb{R}$.

On peut calculer

$$th(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad (\text{comme } e^{x} e^{-x} = 1)$$

$$= 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$$

$$\Rightarrow th'(x) = \frac{2 \times 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = 4\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$$

ayant $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{2x} > 0$

La fonction th est donc strictement croissante et continue ($f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ continue sur $\mathbb{R}$)

avec $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} th(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$

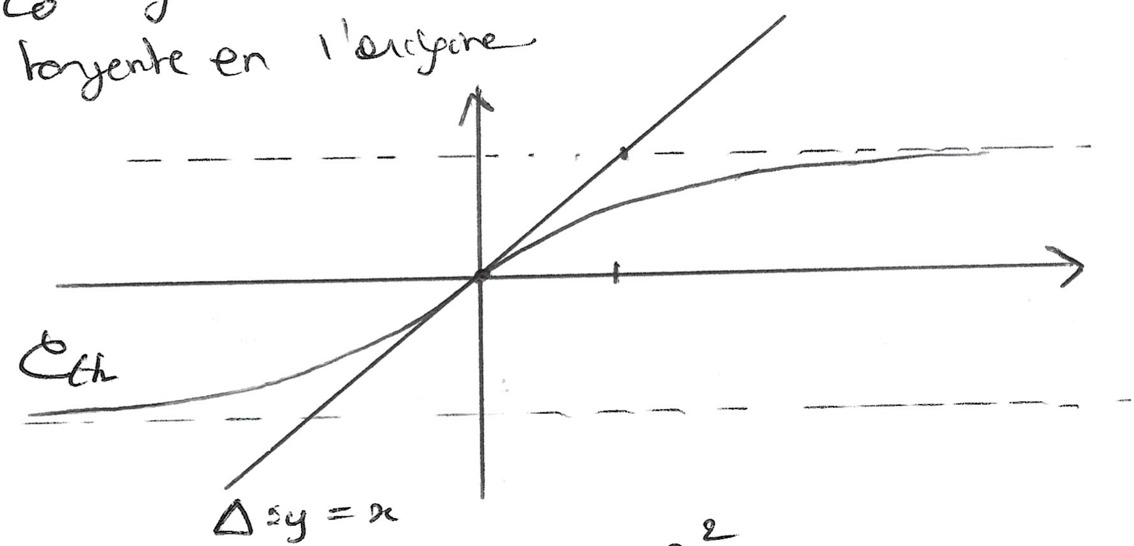
par ailleurs, $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X-1}{X+1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{X} = 1 \end{cases}$ (Règle des monômes)

Donc, par limites composées, on trouve $\lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = 1$

Résumons :

x	$-\infty$		$+\infty$
$th'(x)$		$+$	
th	-1	$\nearrow$	1

2°/ On peut observer que th admet un point d'inflexion en $x=0$ et $T_0 : y = th'(0)\,x + th(0) = x$ est une équation de sa tangente en l'origine



3°/ exprimons pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$th(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{e^{x+y} + e^{-(x+y)}} ;$$

$$th(x)\,th(y) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \times \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + th(x)\,th(y) = \frac{(e^{x} + e^{-x})(e^{y} + e^{-y}) + (e^{x} - e^{-x})(e^{y} - e^{-y})}{(e^{x} + e^{-x})(e^{y} + e^{-y})}$$

Enfin,

$$th(x) + th(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y})}$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{th(x) + th(y)}{1 + th(x)th(y)} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} + e^{y-x} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{e^{x+y} + e^{y-x} + e^{x-y} + e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{y-x} - e^{x-y} + e^{-(x+y)}}$$

$$= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}} = \frac{2}{2} \times \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}$$

$= th(x+y)$ d'après le calcul initial.

Ce qui prouve la relation proposée.

problème II

1°/ a) Le calcul direct fournit $A^2 = -I_4$

b) On a, par 1°/ a) $A^2 = -I_4 \Leftrightarrow (-A)A = I_4$

$\Leftrightarrow A(-A) = I_4$

Ainsi, par définition, A est inversible d'inverse $A^{-1} = -A$

2°/ a) $M^2 = (a I_4 + bA)^2$ or $I_4 A = A I_4$

donc $M^2 = a^2 I_4^2 + 2ab\, I_4 A + b^2 A^2$

$= a^2 I_4 + 2abA + b^2(-I_4)$ par 1°/a)

par ailleurs, $M = a I_4 + bA \Rightarrow b \cdot A = M - a I_4$

donc $M^2 = a^2 I_4 + 2a(M - a I_4) - b^2 I_4$

$= a^2 I_4 - b^2 I_4 + 2aM - 2a^2 I_4$

$= -a^2 I_4 - b^2 I_4 + 2aM$

$= -(a^2 + b^2) I_4 + 2aM$

b) si $(a;b) \neq (0;0)$ alors $a^2 + b^2 \neq 0$

d'où $M^2 = -(a^2+b^2) I_4 + 2aM$

$\Leftrightarrow -M^2 + 2aM = (a^2+b^2) I_4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2+b^2}(-M + 2a I_4) M = I_4$

On obtient de même :

$$M\left[\frac{1}{a^2+b^2}\left(-M+2a\,I_4\right)\right]=I_4$$

ce qui établit l'inversibilité de M.

c) Il vient directement de 2/ b) que :

$$M^{-1}=\frac{-1}{a^2+b^2}M+\frac{2a}{a^2+b^2}I_4$$

$$=\frac{-1}{a^2+b^2}\left(a\,I_4+bA\right)+\frac{2a}{a^2+b^2}I_4$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}\cdot I_4+\frac{-b}{a^2+b^2}\cdot A$$

est bien sous la forme demandée avec $\alpha=\frac{a}{a^2+b^2}$

et $\beta=\frac{-b}{a^2+b^2}$

3/ On observe que $H=A+\sqrt{2}\,I_4$ est de la forme

$M=a\,I_4+b\,A$ avec $\underset{\neq 0}{a=\sqrt{2}}$ et $\underset{\neq 0}{b=1}$

L'étude qui précède permet d'aboutir à :

$\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2+1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\beta=-\frac{1}{3}$ donc :

$$H^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{3}I_4+\frac{-1}{3}A=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\,I_4-A\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1 & -1 & 1 & 3\\ -1 & \sqrt{2}-1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1\\ -1 & -1 & 0 & \sqrt{2}+2\end{pmatrix}$$

Problème III

1°/ on calcule $u_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{2\times 0 - k}{0} 2^k = \binom{0}{0} 2^0 = 1$

$$u_1 = \binom{2-0}{1} 2^0 + \binom{2-1}{1} 2^1$$
$$= 2\times 1 + 1\times 2 = 4$$

$$u_2 = \binom{4-0}{2} 2^0 + \binom{4-1}{2} 2^1 + \binom{4-2}{2} 2^2$$
$$= 6\times 1 + 3\times 2 + 1\times 4$$
$$= 6 + 6 + 4 = 16$$

2°/ on donne le tableau de valeurs :

$k =$	u_k	4^k
0	1	1
1	4	4
2	16	16

d'après 1°/

d'où l'on a bien

$\forall k \in \{0,1,2\}\ \ 4^k = u_k$

3°/ D'après la formule de Pascal, de façon générale

on a $\binom{N}{p} + \binom{N}{p+1} = \binom{N+1}{p+1}$

En posant $N = 2n+1-k \in \mathbb{N}^*$

$p = n \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$

on lit directement :

$$\binom{2n+1-k+1}{n+1} = \binom{2n+1-k}{n} + \binom{2n+1-k}{n+1}$$

$$\Rightarrow \binom{2n+2-k}{n+1} = \binom{2n+1-k}{n} + \binom{2n+1-k}{n+1}$$

4°/ On calcule : $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2(n+1)-k}{n+1} 2^k$

$$= \binom{2(n+1)-(n+1)}{n+1} 2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+2-k}{n+1} 2^k$$

$$= \binom{n+1}{n+1} 2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{2n+1-k}{n} + \binom{2n+1-k}{n+1}\right] 2^k$$

par 3°/

$$= 2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{n} 2^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{n+1} 2^k$$

par linéarité de Σ

$$= 2^{n+1} + \binom{2n+1-0}{n} 2^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1-k}{n} 2^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{n+1} 2^k$$

$$= 2^{n+1} + \binom{2n+1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1-k}{n} 2^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{n+1} 2^k$$

5/ On calcule pour $n \in \mathbb{N}$:

$$2u_n = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^{k+1} \quad \text{(par linéarité de } \Sigma\text{)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-k}{n} 2^{k+1} + \binom{2n-n}{n} 2^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-(k-1)}{n} 2^k + \binom{n}{n} 2^{n+1}$$

(glissement d'indice)

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1-k}{n} 2^k + 2^{n+1}$$

ce qui permet d'aboutir à :

$$2u_n - 2^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1-k}{n} 2^k$$

6/ En calculant pour $n \in \mathbb{N}$ de façon assez similaire à 5/ on obtient :

$$\frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2(n+1)-k}{n+1}2^k$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\binom{2n+2-k}{n+1}2^k + \binom{2n+2}{n+1}2^0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+2-(k+1)}{n+1}2^{k+1} + \binom{n+2}{n+1}\right]$$

(glissement d'indice)

$$= \frac{1}{2}\times 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1-k}{n+1}2^k + \frac{1}{2}\binom{n+2}{n+1}$$

par linéarité de Σ

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1-k}{n+1}2^k + \frac{1}{2}\binom{n+2}{n+1}$$

et ainsi, on conclut avec :

$$\frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}\binom{n+2}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1-k}{n+1}2^k$$

7) pour $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{2}\times\frac{2n+2}{n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)}\binom{2n+1}{n}$$

et donc $\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n+1}{n}$

qui provient de $\binom{N+1}{p+1} = \frac{N+1}{p+1}\binom{N}{p}$

8/ par 5/ on a : $\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1-k}{n} 2^k = 2u_n - 2^{n+1}$

par 6/ on a : $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{n+1} 2^k = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \binom{2n+2}{n+1}\right)$

Donc : $u_{n+1} = 2^{n+1} + \binom{2n+1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1-k}{n} 2^k$
(par 4/) $+ \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{n} 2^k$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \underline{\underline{2^{n+1}}} + \binom{2n+1}{n} + 2u_n \underline{\underline{- 2^{n+1}}} + \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$$

(par 7/) $= 0 + \binom{2n+1}{n} + 2u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} - \binom{2n+1}{n}$

$$= 2u_n + \frac{1}{2}u_{n+1}$$

ce qui revient à écrire $u_{n+1} = 2u_n + \frac{u_{n+1}}{2}$

On en déduit $\frac{1}{2}u_{n+1} = 2u_n$ d'où $u_{n+1} = 4u_n$

9/ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique par 8/
de raison 4 avec $u_0 = 1$ par 1/

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 \times 4^n = 4^n$$