.

# Espaces Vectoriels

**Exercice** $\boxed{1}$ Reconnaître les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ parmi les ensemble suivants, en justifiant soigneusement :

$$E_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geq 0\} \quad ; \quad E_2 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y = z - 3x\}$$
$$E_3 = \left\{(a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{a+b+c}{3} = 0\right\} \quad ; \quad E_4 = \{(a_1;a_2;\ldots;a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \exists k \leq n \ \ a_k = 0\}$$
$$\text{selon } a \in \mathbb{R} \ \ F_a = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x + y + a = 0 \land x + 3az = 0\} \quad ; \quad H = \left\{(x_1;x_2;\ldots;x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$$

**Exercice** $\boxed{2}$ **Etude de certains sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$**

1. On se donne l'ensemble $F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 5z = x + 2y - 2z\}$.
   Démontrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. De façon plus générale, à quelle condition sur les paramètres réels $a_1, \ldots a_6$ a-t-on que l'ensemble $G = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x + a_2y + a_3z = a_4x + a_5y + a_6z\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ?
3. Démontrer que tout sous-ensemble $E$ de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ de la forme :

$$E = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\right\}$$

   est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice** $\boxed{3}$ Parmi les ensembles qui suivent, reconnaître les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ en précisant la valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$F_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\} \quad ; \quad F_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$$
$$F_3 = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0 \ \land y = z\} \quad ; \quad F_4 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$$
$$F_5 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\} \quad ; \quad F_6 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\}$$

**Exercice** $\boxed{4}$ Pour chacun des ensembles de $n$-uplets réels proposés, fournir une description ensembliste formelle puis indiquer s'il s'agit ou non d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, en précisant la valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ si celle-ci est explicite :

1. L'ensemble des $n$-uplets réels à valeurs positives ou nulles.
2. L'ensemble des $n$-uplets réels dont les composantes de rang impaires sont toutes nulles.
3. L'ensemble des $n$-uplets réels dont les composantes de rang $1$ et $4$ sont nulles.
4. L'ensemble des $n$-uplets réels dont les composantes de rang $1$ ou $4$ sont nulles.
5. L'ensemble des quadruplets de réels dont la différence entre le produit de la première avec la dernière composante avec le produit de la seconde avec la troisième composante est nulle.

**Exercice** $\boxed{5}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Démontrer que l'ensemble $S = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0_3\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice** $\boxed{6}$ **Avec des matrices**

On admet que $\mathcal{M}_{n;k}(\mathbb{R})$ est bien un espace vectoriel réel pour cet exercice. Les trois questions qui suivent sont indépendantes.

1. On considère l'ensemble $A = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & -a-b \end{pmatrix} \mid (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
   Démontrer que $A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. On dit qu'une matrice $N$ est nilpotente d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ lorsque $N^p = O$.
   L'ensemble $B_p$ des matrices carrées 3 par 3, nilpotentes d'ordre $p$ forme-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ?
   *indication :* on pourra considérer les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Démontrer que les ensembles $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ constitués des matrices triangulaires resp. supérieures et inférieures forment, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   En déduire qu'il en est de même pour l'ensemble des matrices diagonales de taille $n \times n$.

**Exercice $\boxed{7}$ opérations sur les sous-espaces vectoriels**

On rappelle que $F + G$ est défini comme l'ensemble des éléments $f + g$, sommes d'éléments de $F$ par un élément de $G$.
Dans cet exercice, $n$ est un entier naturel non nul.

1. Justifier que, si $E_1$ et $E_2$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, alors $E_1 \cap E_2$ en est aussi une.
   Etablir plus généralement que l'intersection $F = \cap E_i$ de sous-espaces vectoriels $E_i$ de $\mathbb{R}^n$ est lui-même un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. A l'aide d'un contre-exemple, établir que si $E$ et $F$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ alors $E$ n'est en général pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   *On pourra observer pour s'aider que $E \cup F$ est un sous-espace vectoriel implique que $E \subset F$ ou $F \subset E$.*
3. Justifier que, si $F$ et $G$ sont des sous-e.v. de $\mathbb{R}^n$ alors $F + G$ est également un sous-e.v. de $\mathbb{R}^n$.
4. Etablir que, pour $F$ et $G$ deux sous-e.v. de $E$, un espace vectoriel, on a la hiérarchie :
$$F \cap G \ \subset F \subset F + G$$
5. Démontrer enfin que, si $F \cup G$ est un sous-e.v. de $E$ avec $F$ et $G$ eux-mêmes sous-e.v. de $E$, alors on a nécessairement $G \subset F$ ou $F \subset G$.

**Exercice $\boxed{8}$** On considère un système $(S)$ linéaire et homogène à $n$ équations et $k$ inconnues.
Démontrer que l'ensemble des solutions de $(S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^k$.

## Familles de vecteurs

**Exercice $\boxed{9}$** Les familles suivanbtes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$ ?

1. La famille $\mathcal{F} = ((4;7;-1)\ ;\ (2;4;-0.5))$
2. La famille $\mathcal{G} = ((1;0;1)\ ;\ (0;2;2)\ ;\ (3;7;1))$
3. La famille $\mathcal{H} = ((1;0;0)\ ;\ (0;1;1)\ ;\ (1;1;1))$

**Exercice $\boxed{10}$** On donne les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par $u = (1;1;0)$, $v = (4;1;4)$ et $w = (2;-1;4)$

1. Démontrer que chaque famille formée par exactement deux vecteurs parmi $u$, $v$ et $w$ est libre dans $\mathbb{R}^3$
2. La famille $(u;v;w)$ est-elle libre ?

**Exercice $\boxed{11}$** Etudier la liberté des familles $\mathcal{F}_i$ données dans l'espace $E$ considéré

1. Les familles $\mathcal{F}_1 = ((2;4;3)\ ;\ (1;5;7))$, $\mathcal{F}_2 = ((1;2;3)\ ;\ (2;3;4)\ ;\ (3;4;5)\ ;\ (4;5;6))$ et $\mathcal{F}_3 = ((1;1;0)\ ;\ (2;1;0)\ (0;1;1))$ dans $E = \mathbb{R}^3$

2. Les familles $\mathcal{F}_1 = ((1;1;2;1)\ ;\ (1;0;1;1)\ ;\ (0;1;2;3))$, $\mathcal{F}_2 = ((1;-1;1;-1)\ ;\ (1;1;1;1)\ ;\ (-1;0;-1;0))$ dans $E = \mathbb{R}^4$
3. La famille $\mathcal{F} = (e_1 + e_2 + \cdots + e_n\ ;\ e_2 + e_3 + \cdots + e_n\ ;\ e_3 + e_4 + \cdots + e_n\ ;\ \ldots\ ; e_{n-1} + e_n\ ;\ e_n)$ dans $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \leq 2$ entier naturel.
4. Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les familles :

$$\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ avec } n = 2 \quad ; \quad \mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ avec } n = 2$$

$$\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ avec } n = 3 \quad ; \quad \mathcal{F}_4 = (I_n\ ;\ 2I_n\ ; \ldots ;\ nI_n) \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ fixé}$$

**Exercice** $\boxed{12}$ On donne les vecteurs $u = (1;2;3;4)$ et $v = (1;-2;3;-4)$ de $\mathbb{R}^4$.

1. Peut-on trouver des valeurs réelles pour $x$ et $y$ telles que $(x;1;y;1) \in \text{vect}(u;v)$ ?
2. Déterminer l'ensemble des couples $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $(x;1;1;y) \in \text{vect}(u;v)$.

**Exercice** $\boxed{13}$ **comparaison de sous-espaces vectoriels**

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne $F = \text{vect}\left((2;3;-1)\ ;\ (1;-1;-2)\right)$ et $G = \text{vect}\left((3;7;0)\ ;\ (5;0;-7)\right)$. Démontrer que $F = G$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $F = \text{vect}\left((1;0;1;1)\ ;\ (-1;-2;3;-1)\ ;\ (-5;-3;1;-5)\right)$ et $G = \text{vect}\left((-1;-1;1;-1)\ ;\ (4;1;2;4)\right)$. Comparer $F$ et $G$.

**Exercice** $\boxed{14}$ On définit l'ensemble $\mathcal{E}$ formé de toutes les matrices réelles s'écrivant sous la forme :

$$M(a;b;c) = \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectorielsur $\mathbb{R}$.
2. En donner une famille génératrice
3. L'ensemble $\mathcal{E}$ est-il stable pour la multiplication usuelle des matrices ?
4. Existe-t-il une base de cet espace formée uniquement de matrices inversibles (au sens du produit usuel) ?

**Exercice** $\boxed{15}$ On donne $E = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2y - z\ \wedge\ t = x + y + z\}$.
Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base et la dimension.

**Exercice** $\boxed{16}$ On donne $E = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + z = y + 2t\ \wedge\ x = y - z + t\}$.
Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base et la dimension.

**Exercice** $\boxed{17}$ On rappelle que la famille de matrices $(E_{ij})_{i \leq nj \leq n}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner une base, puis la dimension, du sous-espace vectoriel $\mathcal{T}_n^+$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices triangulaires supérieures.
2. Même question avec l'ensemble des matrices symétriques.

**Exercice** $\boxed{18}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Etudier la liberté de la famille $(A^k)_{k\leq n}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire une base de vect$(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$

**Exercice** $\boxed{\mathbf{19}}$ Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer $M^2$ et $M^3$.
2. Vérifier la relation $M^3 - 4M^2 + M + 6I_3 = O$.
3. Démontrer que $(M^2; M; I_3)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On notera $F = \text{vect}(M^2; M; I_3)$
4. Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n \in F$

**Exercice** $\boxed{\mathbf{20}}$ On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Etablir que, pour tout entier naturel $n$, on a $A^n \in \text{vect}(I_2; A)$.

**Exercice** $\boxed{\mathbf{21}}$ **RàR** On se donne, sur $\mathbb{R}^n$, une famille $\mathcal{F} = (x_1 \dots x_n)$ de $n$ vecteurs. On écrira $X_1, \dots, X_n$ les matrices colonnes associées canoniquement à $x_1, \dots x_n$.
On désigne par $A$ la matrice carrée d'ordre $n$ pour laquelle $X_1, \dots X_n$ forment les colonnes de $A$.

1. Démontrer que $A$ est inversible si, et seulement si, la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. On désigne par $C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ une combinaison linéaire des $X_i$, $(i \leq n)$.
   (a) On suppose $A$ inversible : démontrer que $C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
   (b) On suppose que, pour un certain $i \leq n$, on a $\lambda_i \neq 0$. Démontrer qu'alors $C = 0 \;\Rightarrow\; A \notin GL_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $i \leq [\![1; n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On définit $\tilde{A}_i$ la matrice obtenue en changeant la colonne $X_i$ par la colonne $C$. Démontrer qu'alors, $A \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{A}_i \in GL_n(\mathbb{R})$

**Exercice** $\boxed{\mathbf{22}}$ On rappelle qu'une droite vectorielle $D$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 d'un espace vectoriel $E$.

1. Justifier qu'une droite vectorielle admet pour base une famille composée d'un unique vecteur non nul.
2. Etablir que, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice réelle d'ordre 2 non nulle, alors les solutions du système $MX = 0_2$ forment une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ revient à dire que $det(M) = ad - bc = 0$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Démontrer que l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $\exists y \in \mathbb{R}^3 \quad AY = X$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ (les notations $X$ et $Y$ désignent les colonnes associées canoniquement à $x$ et $y$ respectivement).
   Qu'en est-il des $x \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $AX = 0$ ?

**Exercice** $\boxed{\mathbf{23}}$ On définit $P(X) = aX^2 + bX + c$ polynôme de degré au plus 2. On considère :

$$I(P) = \int_0^1 P(t)e^{-t}dt$$

1. Démontrer que l'ensemble $K$ des triplets $(a; b; c)$ tels que $I(P) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $K$ et en déduire les polynômes $P$ de degré au plus 2 vérifiant $I(P) = 0$.
3. Le résultat précédant se généralise-t-il à tout polynôme $P$ à coefficients réels ?