.

Relations Binaires

Exercice $\boxed{1}$ Pour chaque relation binaire définie sur E donnée, indiquez (en justifiant) celles qui sont d'équivalences :

1. Sur $E = \mathbb{R}$, on écrit $x \circ y$ lorsque $xy = 0$
2. Sur $E = \mathbb{Z}$, on écrit $n =_3 k$ lorsque l'entier $n - k$ est divisble par 3
3. Sur $E = \mathcal{P}(A)$ avec A un ensemble quelconque non vide, on écrit $a \sim b$ lorsque les parties sont en bijection.
4. Sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on écrit $f \doteq g$ lorsque les fonctions f et g vérifient $\exists x \in \mathbb{R} \;\; f(x) = g(x)$
5. Sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, en se donnant une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide de $\mathbb{R}$, on écrit $f \equiv_A g$ lorsque les fonctions f et g vérifient $\forall x \in A \;\; f(x) = g(x)$

Exercice $\boxed{2}$ Pour chaque relation binaire donnée, indiquez, en justifiant, celles qui sont des ordres (larges). Le cas échéant, précisez si l'odre est total ou partiel.

1. Sur $E = \mathbb{R}^I$, on écrit $f \;\leq_I\; g$ lorsque $\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)$
2. Sur $\Lambda^\star$, ensemble des mots de la langue française, on écrit $\omega \;\prec\; \zeta$ lorsque le mot ω apparaît dans l'écriture du mot ζ.
   Exemple : si $x =$chat et $y =$chaton, on observe que $\underbrace{\text{chat}}_{x}$ on et donc $x \prec y$
3. Sur $E = \mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels, on écrit $P \downarrow Q$ lorsque $deg(P) \leq deg(Q)$.
4. Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit $(x; y) \prec (z; t)$ lorsque $x < z \;\;\vee\;\; (x = z \;\wedge\; y \leq t)$
5. Sur $\mathcal{P}$, la population humaine actuelle, on écrit $h\mathcal{R}y$ lorsque y est un descendant (biologique) de h
   On pourra discuter selon qu'on considère pouvoir être un descendant de soi-même ou pas...

Exercice $\boxed{3}$ **Des relations connues**

1. Pour chacune des relations binaires fournies, indiquer les propriétés valables parmi *réfléxivité, symétrie, antisymétrie, transitivité*.
   (a) Les événements d'une même tribu $\mathcal{A}$ sont *indépendants*
   (b) Les événements d'une même tribu $\mathcal{A}$ sont *incompatibles*
   (c) Les événements d'une même tribu $\mathcal{A}$ sont *équiprobables* (i.e. A et B vérifient $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B]$.
   (d) Les matrices A et B dites *semblables* d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad A = PBP^{-1}$
   (e) Les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\forall i \leq n \;\; u_i \leq v_i$
2. Indiquer ainsi les relations d'équivalences, d'ordre parmi les relations présentées.
3. Les ordres éventuellement présentés sont-ils partiels ou totaux ?

Exercice $\boxed{4}$ **RàR : paradigmes des relations binaires**

On considère une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E.

1. *(Paradigme ensembliste)* On désigne par R le sous-ensemble de E^2 défini par :

$$R = \{(x; y) \in E^2 \mid x\mathcal{R}y\}$$

   et on appelle cet ensemble *paradigme ensembliste de* $\mathcal{R}$.
   (a) On prend pour $\mathcal{R}$ la relation $\leq_{\mathbb{R}}$ d'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.
   Représenter dans le plan usuel, assimilé à $\mathcal{R}^2$, le paradigme ensembliste de $\leq_{\mathbb{R}}$
   (b) Même question avec la relation binaire définie par $x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 5 \leq 2 + 5y - y^2$

2. *(Paradigme par graphe)* On définit un graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ dont les sommets portent comme étiquettes les noms des objets de E. On relie deux sommets s et t par une arête $[st]$ si, et seulement si, $s\mathcal{R}t$ est vérifié.

   Le graphe ainsi défini est un autre paradigme de $\mathcal{R}$.

   (a) On note $\mathbb{B} = \{0; 1\}$ et on pose $E = \mathbb{B}^h$ avec $h \geq 2$ un entier naturel.
   On définit ensuite une relation binaire $\mathcal{C}_h$ sur E par :
   $$(b_1 \dots b_h)\mathcal{C}(b'_1 \dots b'_h) \quad \Leftrightarrow \quad \exists! i \leq h \ \ b_i \neq b' i$$
   Représenter le graphe associé à cette relation dans les cas $h = 2$ et $h = 3$

   (b) La représentation sous forme de graphe de $\mathcal{C}_h$ est nommée h-cube. Comment l'interprétez-vous ?

   (c) On se donne cette fois-ci $E = \mathcal{P}(\llbracket 1; 3 \rrbracket)$ muni de la relation binaire (d'ordre) $\subset$.
   Représenter le graphe associé.

Exercice $\boxed{5}$ On nomme *application croissante de E dans F* toute application $f \ : \ E \longrightarrow F$ avec $(E; \leq)$ et $(F; \prec)$ deux enembles ordonnés vérifiant :
$$\forall x \in E \ \ \forall y \in E \quad x \leq y \quad \Longrightarrow \ f(x) \prec f(y)$$

1. Justifier que $\mathbb{P}$ est une application croissante de $(\mathcal{A} \ ; \ \subset)$ dans $([0; 1] \ ; \leq)$, l'espace $(\Omega; \mathcal{A}; \ \mathbb{P})$ étant un espace probabilisé.
2. Proposez une définition d'application décroissante similaire.
3. Démontrer que la composée d'applications croissantes est croissante en précisant bien les hypothèses sur les domaines de chaque application.
4. Ecrire des résultats analogues avec la décroissance.

Exercice $\boxed{6}$ RàR : équivalence en analyse Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ fixé.
On définit la relation binaire $\sim_a$ par $f \sim_a g$ pour f et g deux fonctions définies au voisinage épointé de a lorsque :
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

1. Démontrer que $\sim_a$ définie une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de a, ne s'annulant pas au voisinage de a (sauf peut-être éventuellement en a).
2. Que signifierait, pour f, que l'on a $f \sim_a O$?
3. *Etude de quelques exemples*

   (a) Démontrer que $\ln(1 + x) \ \sim_0 x$ et que $e^x \ \sim_0 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

   (b) Vérifier que $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \ \sim_{+\infty} x^3$

   (c) Etablir que, pour tout polynôme P, on a $P(x) \ \sim_0 \ P(x) + x^n$ avec $n > \deg(P)$ entier naturel.
4. Proposer des équivalents (le plus simples possibles) en 0 de :
   $$\textbf{a)} \ \ e^x \quad \textbf{b)} \ \ \frac{1}{1+x} \quad \textbf{c)} \ \ 1 - \frac{1}{1+x} \quad \textbf{d)} \ \ \ln(1-x) \quad \textbf{e)} \ \ \ln(1+x^2) \quad \textbf{f)} \ \ e^x - 1 - \frac{x^2}{2} \quad \textbf{g)} \ \ \sqrt{1+x} - 1$$
5. Expliquer pourquoi, si f admet une limite finie $l \neq 0$ en a, il est préférable de retenir un équivalent (le plus simple possible) de $f(x) - l$ au voisinage de a.

Exercice $\boxed{7}$ Ordre vectoriel partiel mais naturel
On définit sur $\mathbb{R}^n$ une relation binaire par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall y \in \mathbb{R}^n \ \ x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \leq n \ x_i \leq y_i$$

1. Pour $n = 2$, représenter dans le plan les vecteurs $x \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x \prec (2;3)$ puis ceux vérifiant $x \prec (-2;1)$
2. Pour $n = 2$, représenter dans le plan les vecteurs $y \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(-2;-3) \prec y$ puis ceux vérifiant $(2;-1) \prec y$
3. Vérifier que $\prec$ définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Cette dernière est-elle totale ? (discuter selon n)
4. Etablir que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension au moins 1, alors F ne possède ni majorant, ni minorant.

Cet ordre s'appelle ordre produit de $\mathbb{R}^n$

Exercice $\boxed{8}$ Ordre vectoriel total mais moins naturel

On considère $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$ entier naturel. On souhaite définir sur E l'ordre dit *lexicographique* par récurrence sur n. On commence donc par étudier le cas $n = 2$

1. On considère ici que $n = 2$. Pour $X = (x_1; x_2)$ et $Y = (y_1; y_2)$, on écrira que $X \leq_2 Y$ lorsque :

$$x_1 < y_1 \ \vee \ (x_1 = y_1 \ \wedge \ x_2 \leq y_2)$$

Les éléments x_1, x_2, y_1 et y_2 étant des réels, l'usage de $\leq$ est celui entendu au sens usuel.

   (a) On donne $u = (1;3)$. Représenter graphiquement l'ensemble des éléments $x \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x \leq_2 u$.
   (b) On donne $v = (2;-1)$. Représenter graphiquement l'ensemble des éléments $x \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $v \leq_2 x$.
   (c) Etablir que $\leq_2$ définit une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}^2$

2. **prolongement facultatif**
On suppose maintenant que l'ordre $\leq_n$ a été défini sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$. On définit $\leq_{n+1}$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$X = (x_i)_{i \leq n+1} \ \leq_{n+1} \ Y = (y_i)_{i \leq n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad ((x_i)_{i \leq n} \ <_n \ (y_i)_{i \leq n}) \ \vee \ (\forall i \leq n \ \ x_i = y_i \ \wedge x_{n+1} \leq y_{n+1})$$

   (a) Démontrer que, si $\leq_n$ est un ordre total sur $\mathbb{R}^n$, alors $\leq_{n+1}$ est un ordre total sur $\mathbb{R}^{n+1}$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation binaire $\leq_n$ définit un ordre total sur $\mathbb{R}^n$

3. *Et pour finir, pour les plus curieux :* A partir de cette démarche, établir que les mots du dictionnaire sont bien rangées selon une relation binaire que l'on pourra expliciter.

Exercice $\boxed{9}$ Equivalence fonctionnelle

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F donnée. On définit $\equiv_f$ une relation binaire sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \equiv_f y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

1. Démontrer que $\equiv_f$ définit toujours une relation d'équivalence sur E.
2. Que représentent les classes d'équivalences pour $\equiv_f$?
3. Etablir que la relation R définie sur les matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ par : $A \ R \ B \quad \Leftrightarrow \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n} b_{kk}$

définit une relation d'équivalence.