.

Sommes, Séries

Exercice $\boxed{1}$ **Sommes Classiques**

Retrouver les valeurs des sommes *classiques* suivantes :

$$S_1(n) = \sum_{k=0}^{n} k \quad ; \quad S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad ; \quad S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3$$

Exercice $\boxed{2}$ On pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable et déterminer les dérivées et dérivée seconde de f_n :
   a) Sous la forme d'une somme s'écrivant avec le symbole Σ
   b) Sous une forme explicite n'utilisant pas le symbole Σ
2. En déduire des expressions explicites de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$ ainsi que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2x^k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

   Remarque : On distinguera $x \neq 1$ et $x = 1$

Exercice $\boxed{3}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Exercice $\boxed{4}$ Vérifier que, pour les sommes suivantes, où $n \in \mathbb{N}$, on a bien :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Exercice $\boxed{5}$ Démontrer que, pour tous entiers naturels p et n avec $0 \leq p \leq n$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^n\binom{n}{p}$$

Indication : On pourra prouver que, sous ces conditions, on a $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$ si $k \leq p$.

Exercice $\boxed{6}$ **téléscopage** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle donnée.

1. On pose $u_n = a_{n+1} - a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = a_{n+1} - a_0$

   Ce type de calcul s'appelle un téléscopage.
2. Dans cette question, on pose $a_n = 2^n$. Déterminer alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$
3. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$

4. (*avec des produits*) Déterminer la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Exercice $\boxed{7}$ la série harmonique

On définit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etablir que $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}$ puis calculer la valeur de cette intégrale, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que $H_n \geq \ln n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
3. Démontrer ainsi que (H_n) diverge.

On pourra retenir que la série dite *Harmonique* s'écrivant $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ est *divergente*

Exercice $\boxed{8}$ Convergence des séries sub-harmoniques

On pose $\alpha > 1$ réel et on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$

1. Justifier que la suite (S_n) est croissante.
2. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la convergence, puis la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$ lorsque $\alpha > 1$
4. En étudiant les intégrales $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}\,dt$, démontrer que (S_n) converge.
5. En déduire que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs vérifiant :

$$\exists\alpha > 1 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ \forall n \geq n_0 \ u_n \leq n^{-\alpha}$$

la série de terme général u_n converge.

Exercice $\boxed{9}$ Divergence des séries super-harmoniques

On pose $\alpha < 1$ réel et on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$

1. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt = +\infty$ lorsque $\alpha < 1$
3. En étudiant les intégrales $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}\,dt$, démontrer que (S_n) diverge.
4. En déduire que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs vérifiant :

$$\exists\alpha < 1 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ \forall n \geq n_0 \ u_n \geq n^{-\alpha}$$

la série de terme général u_n diverge.

Info : On appelle *critère de Riemann* le critère donnant la convergence (ou la divergence) d'une série se ramenant à $\sum \frac{1}{n^\alpha}$: la synthèse des exercices précédents fournissent ce critère.

Exercice $\boxed{-\frac{1}{12}}$ *Pour prendre conscience*

On notera $S(x)$ la valeur réelle obtenue lorsque la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ converge. Les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} x^k$ seront notées $S_n(x)$ et enfin, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sera notée f.

1. Rappelez la nature de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$. Comparez avec le domaine de définition réel de f.
2. Calculer $S(0.1)$. Que représentent les sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ pour $x = 0.1$?
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $S_n(10)$ en fonction de n ?
4. Calculer $f(10)$. De façon générale, quel est le signe de $f(x)$ pour $x > 1$?
5. Déterminer le signe de $S_n(x)$ pour $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}$.
6. <u>*Si*</u> $(S_n(x))$ convergeait, pour $x > 1$, que pourrait-on alors dire de sa limite ? Conclure.

Exercice $\boxed{\sum}$ Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = e^{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \frac{n^2-5}{n(2n+1)}$
3. $u_n = \frac{n-2}{2^n-1}$
4. $u_n = \frac{5n^2+10n+12}{3^n-2^n}$
5. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$
6. $u_n = \frac{n}{n+1}$
7. $u_n = \frac{\cos(n!)}{3^n+\cos(n!)}$
8. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Exercice $\boxed{\sum !}$ Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants, puis calculer la valeur de la somme :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
2. $u_n = \frac{6}{5^{n+2}}$
3. $u_n = \frac{2n(n+1)}{3^n}$
4. $u_n = (-1)^n\frac{n^2+3}{5^n}$
5. $u_n = (-1)^n\frac{2^n}{(n+1)!}$
6. $u_n = \frac{n^2+n+1}{n!}$
7. $u_n = \ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2)}\right)$
8. $u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n!}$; $k \in \mathbb{N}^*$ fixé

Exercice $\boxed{\mathbf{10}}$ On considère un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$. Le système d'événements (A_n) est considéré comme étant consitué d'événements disjoints deux à deux. On pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Dans chacun des cas qui suit, dire s'il est possible de choisir la suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ proposée,en justifiant (les événements A_k pour $k < n_0$ seront alors traités comme négligeables par convention) :

1. On prend $a_n = \frac{n-1}{n!}$ avec $n_0 = 1$
2. On prend $a_n = \frac{(-1)^n(2^{2n+1})}{(2n)!}$ avec $n_0 = 2$.
3. On prend $a_n = p(1-p)^n$ avec $n_0 = 1$
4. On prend $a_n = n2^{-n}$ pour $n_0 = 4$