

# Premier semestre

## Chapitre Initialisation : Raisonnements en mathématiques

- Principe du raisonnement par récurrence. Diverses formes de raisonnements mathématiques (contraposée, par l'absurde, disjonction de cas)
- Vocabulaire et symbolique de la logique mathématique (pour le concours D2)
- Révisions sur les suites arithmétiques, géométriques. Traitement des suites arithmético-géométriques.

## Chapitre I : Suites et Sommations

- Notion générale de suite, exemples, vocabulaire. cas des suites numériques.
- Etude d'une suite : Variations, méthodes.
- Introduction (basique) au symbole  $\Sigma$ , usage, exemples
- Comportement asymptotique : limites de suites, opérations, théorème des gendarmes, théorème de limite monotone (admis).
- Synthèse de pratiques sur la manipulation de sommation  $\Sigma$

## Chapitre II : Etudes de fonctions numériques

- Etude des fonctions usuelles : linéaire, exponentielle, logarithme, puissances, valeur absolue (rappels synthétiques)
- Limites de fonctions, en un point, aux infinis. Aspects graphiques, extensions des résultats vus sur les suites.
- Continuité (non théorique), dérivabilité (variations, extrema locaux et globaux). Aspects graphiques, aspects analytiques.
- Asymptotes, croissances comparées.
- Convexité (cas des fonctions de classe  $C^2$ )

## Chapitre III : Ensembles, Applications

- Opérations élémentaires sur les ensembles ( $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\bullet^c$ ). Propriétés et dénombrements associés.
- Ensemble  $\mathcal{P}(E)$  (et dénombrement), inclusion, partition.
- Produit et puissances cartésiens (sur un nombre fini d'ensembles), dénombrement associé.
- Applications : injection, surjection, bijection. Dénombrements de  $B^A$  et  $\mathbb{S}_E$ .

## Chapitre IV : Combinatoire

- Permutations, arrangements, combinaison.
- Coefficients binômiaux, propriétés usuelles. Rappels sur la loi Binômiale.
- Formule du binôme de Newton.

## Chapitre V : Systèmes linéaires et introduction aux matrices

- Système linéaire, écriture matricielle. Opérations sur les lignes et colonnes. Pivot de Gauss.
- Matrices : définition. Opérations algébriques sur les matrices, transposition. Pratique.
- Ensembles particuliers de matrices : triangulaires, diagonales, symétriques.
- Inversibilité, lien avec la résolution de systèmes, système de Cramer.

## Chapitre VI : Probabilités

- Univers, événements, systèmes complet d'événements, probabilité  $\mathbb{P}$ .
- Probabilités conditionnelles, formules usuelles : probabilités totales, formule de Bayes.
- Indépendance en probabilités.

**Chapitre VII : Intégrales de Riemann**

- Intégration sur un segment de  $\mathbb{R}$ , calculs par primitives. Rappel des propriétés élémentaires.
- Techniques usuelles : intégration par parties.
- Définition de l'intégrale impropre, premiers exemples.

**Chapitre VIII : Compléments d'analyse de fonctions réelles**

- Théorème de Rolle, Formule de Taylor, développements limités d'ordre 1 ou 2 (aucune démonstration). Applications.

## Second semestre

**Chapitre IX : Espaces vectoriels**

- Structure d'espaces vectoriels, exemples fondamentaux.
- Sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels de référence. Cas de  $\mathbb{R}^n$ .
- Familles de vecteurs, combinaisons linéaires, familles libres, génératrices, bases. Dimension.

**Chapitre X : Relations binaires**

- Définition, réflexivité, symétrie, antisymétrie et transitivité. Graphe d'une relation binaire.
- Ordre, relation d'équivalence. Relation de préférence
- Vocabulaire des ordres : croissance, décroissance, majorant, minorant, minimum, maximum (plus grand, plus petit élément)
- Relations d'équivalence : classes d'équivalence. Classes d'indifférence. Lien avec les partitions d'un ensemble.
- Exemples en analyse (domination, prépondérance et équivalence au voisinage d'un point).

**Chapitre XI : Sommes, séries**

- Rappels sur les sommes. Synthèse de formules rencontrées.
- Notion de série, convergence, divergence.
- Séries de référence : géométrique (et ses dérivées), exponentielle (admise)

**Chapitre XII : Variables Aléatoires Réelles**

- Définition d'une VAR, éventuellement d'un vecteur aléatoire.
- Variables aléatoires discrètes : loi, espérance, variance, écart-type, moments d'ordre 1 et 2.
- Fonction de répartition, cas d'une VAR discrète.
- Lois discrètes usuelles : uniforme, Bernoulli, binômiale, géométrique, hyper-géométrique et Poisson.
- Introduction aux couples de VAR

**Chapitre XIII : Applications linéaires**

- Définition, exemples sur des espaces de référence. Cas des formes linéaires.
- Noyau, image d'une application linéaire.
- Cas de la dimension finie : matrices d'une application linéaire relativement aux bases.
- Valeurs propres, vecteurs propres. Sous-espaces propres.
- Diagonalisation : définition, quelques exemples. Cas des matrices  $\#sp(A) = n$  et des matrices symétriques (admis)

**Chapitre XIV : Intégrales Impropres, introduction aux densités**

Une analogie avec les séries pourra être proposée

- Compléments sur l'intégration, définition des intégrales impropres.
- Convergence, divergence d'intégrales. Intégrales impropres usuelles.
- Densités de probabilités : Définition, VAR à densité, espérance, variance et moments d'ordre 1 et 2 du cas à densité
- Exemples de lois à densité : loi uniforme et loi exponentielle.

---

## Troisième semestre

### Chapitre XV : Analyse des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

- Parties ouvertes et fermées de  $\mathbb{R}^n$  définies par des systèmes d'inéquations.
- Dérivées partielles et points critiques. Gradient (vocabulaire non attendu)
- Matrices Hessiennes en un point. Cas du point critique.
- Convexité, concavité des applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$
- Formule de Taylor à l'ordre 2 en un point.
- Extrema locaux : recherches de conditions nécessaires ou suffisantes

### Chapitre XVI : Vecteurs Aléatoires discrets

- Définition, loi d'un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$ . Cas de la loi du couple.
- Lois marginales, lois conditionnelles. Cas des couples.
- Indépendance de deux, puis de  $n$ , variables aléatoires réelles.
- Espérance d'un produit, variance d'une somme : cas de l'indépendance.
- Etude plus particulière des couples : Covariance, coefficient de corrélation linéaire, variance de la somme.

### Chapitre XVII : Lois à densité particulières

- Rappels sur les lois uniformes et exponentielles
- Loi Normale centrée réduite : étude, tableau de valeurs particulières.
- Généralisations aux lois  $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

## Quatrième semestre

### Chapitre XVIII : Compléments d'algèbre linéaire

Ce chapitre sera surtout l'occasion de traiter des problèmes et des annales supplémentaires.

- Compléments sur la diagonalisation
- Compléments sur les matrices de passages
- Compléments sur l'étude de matrices particulières

### Chapitre XIX : Estimation

- Echantillonnage : définition d'un échantillon. Problématique de l'estimation.
- Estimateur, biais d'un estimateur. Risque quadratique.
- Estimation ponctuelle d'une proportion.
- Loi faible des grands nombres.

### Chapitre XX : Optimisation sous contraintes

- Extrema locaux de fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  sous contraintes homogènes.
- Méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Les chapitres qui suivront seront hors-programme au regard du concours ens-D2 mais pourront se révéler utiles pour approfondir les connaissances ou préparer d'autres concours.