.

# Variables Aléatoires Discrètes

## Cas fini : généralités

**Exercice** $\boxed{1}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Une urne contient deux boules portant le numéro 1, deux portant le numéro 2 et une portant le numéro 3.
On note $X$ la somme des numéros portés par deux boules simultanément prélevées depuis cette urne.
Décrire la loi de $X$, en donner l'espérance et l'écart-type.

**Exercice** $\boxed{2}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On dispose d'un dé à six faces dit *de tir soutenu* fabriqué de la sorte : deux faces portent le numéro 1, deux faces portent le numéro 2, une face porte le numéro 3 et une face porte un symbole *d'enrayement* assimilé à 0.
On lance deux tels dés, indépendamment, et on totalise les scores obtenus.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $T$ ainsi obtenue ? On en donnera l'espérance et l'écart-type.

**Exercice** $\boxed{3}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On lance deux dés à six faces numérotées de 1 à 6, équilibrés, et on définit $M$ comme le plus grand des scores obtenus.
Déterminer la loi de $M$ ainsi que son espérance.

**Exercice** $\boxed{DN}$ Dans l'univers $\Omega$ des jeux, on note $DN$ la valeur chiffrée obtenue par un lancé de dé à $N$ faces numérotées de 1 à $N$ supposé bien équilibré.
On l'assimile alors à une variable aléatoire elle-même notée $DN$. Par exemple, $D6$ représente la variable aléatoire associée au lancer d'un dé dit *usuel*.

1. Donner la loi de $DN$ pour $N \in \mathbb{N}^*$. En déduire l'espérance et la variance de $DN$.
2. De nombreux livres de règles écrivent $kDN$, avec $k$ et $N$ entiers naturels supérieur ou égal à 2, pour désigner le résultat obtenu en lançant $k$ dés indépendamment de type $DN$ et en considérant la somme des résultats obtenus.
   Ainsi, $3D6$ désigne le score obtenu en additionnant trois lancers de dés dits *usuels*.
   (a) Décrivez la variable aléatoire $kDN$ avec les notations courantes en mathématiques.
   On donnera en particulier $kDN(\Omega)$.
   (b) Déterminer explicitement la loi de $2D6$. En donner l'espérance et la variance.
   (c) Démontrer que, pour tout $N \geq 2$, l'événement $[2DN = N+1]$ est le plus probable parmi $([2DN = n])_{n \in 2DN(\Omega)}$
   (d) Déterminer de façon générale $\mathbb{E}(kDN)$.
3. Toujours dans le même contexte, on note $DN \times k$ le fait de lancer un dé de type $DN$ et d'en multiplier le résultat par $k \in \mathbb{R}$.
   (a) Décrivez la variable aléatoire $DN \times k$ avec les notations courantes en mathématiques. On donnera en particulier $kDN(\Omega)$.
   (b) Déterminer la loi de $DN \times k$ et en calculer l'espérance et la variance.
4. Commentez les usages des différentes notations employées.

**Exercice** $\boxed{4}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ **Entropie d'un VAR - discrète**
En théorie de l'information, on définit *l'entropie de Shanon* d'une variable aléatoire $X$ *finie*, définie sur $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$, et notée $H(X)$, comme :

$$H(X) = -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}[X = x] \ln\left(\mathbb{P}[X = x]\right)$$

où l'on adoptera la convention $x \ln x = 0$ si $x = 0$ (obtenue par prolongement par continuité).
Dans la suite, on pourra noter $card(X(\Omega)) = n \in \mathbb{N}^*$ et désigner par $x_1 \dots x_n$ les éléments de $X(\Omega)$.

1. Etablir que $\forall x \geq 0 \quad -x\ln x \leq 1-x$ et en déduire que $0 \leq H(X) \leq \ln n$
2. Justifier que, si $X$ est constante (en tant qu'application) alors $H(X)=0$. Etudier la réciproque.
3. Etablir que $H(X)=\ln n \;\Leftrightarrow\; \forall k \leq n\; \mathbb{P}[X=x_k]=\frac{1}{n}$
   Comment interpréter ce résultat ?

**Exercice** $\boxed{5}$ **RàR** On dispose d'une urne contenant $B$ boules blanches et $N$ boules noires. On pourra noter $M=N+B$ le nombre total de boules de l'unre.

On procède à $r \leq N+B=M$ tirages successifs *sans* remise de boules de cette urne. On considère qu'à chaque tirage, chaque boule de l'urne peut être obtenue avec équiprobabilités selon les boules restantes.

On appelle $X$ la variable aléatoire qui, à chaque réalisation de cette expérience modélisée par un espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$, associe le nombre de boules noires obtenues.

1. Quelle est la loi de $X$ si $r=1$ ?
2. Déterminer $\mathbb{P}[X=1]$ puis $\mathbb{P}[X=2]$ en fonction de $N$, $B$ et $r$, puis en fonction de $M$, $N$ et $r$.
3. Décrire $X(\Omega)$ dans le cas général.
4. Généraliser en décrivant la loi de $X$.
   Cette dernière est appelée *loi hypergéométrique* de paramètres $(r;M;N)$, notée $\mathcal{H}(r;M;N)$
5. Démontrer que, pour tous $n;\ S;\ N$ entiers naturels avec $n \leq S$et $N < S$ on a : $\displaystyle\sum_{a\leq k\leq b} \frac{\binom{N}{k}\binom{S-N}{n-k}}{\binom{S}{n}} = 1$
   avec $a=\max\{0;n-(S-N)\}$ et $b=\min\{n,N\}$.
   Quel lien peut-on faire avec la loi $\mathcal{H}$ (paramètres étant à préciser) ?
6. On fait l'hypothèse que $M$ et $N$ ont été définis de sorte que $\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{M}{N+M}=p\in]0;1[$.
   Démontrer qu'alors on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{\binom{M}{k}\binom{N}{n-k}}{\binom{M+N}{n}} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pour tous $k \leq n$ entiers naturels.
   Comment interpréter ce résultat ?
7. On suppose qu'un champ de fleurs contient $F$ fleurs avec $F$ très très grand. La proportion de fleurs roses est de $\dfrac{1}{3}$ dans ce champ. On cueille dans ce champ un joli bouquet de 12 fleurs prises totalement au hasard. On note $X$ le nombre de fleurs roses obtenu.
   Quelle est la loi de $X$ ? Comment calculer simplement une approximation numérique de $\mathbb{P}[X \geq 3]$ ?

**Exercice** $\boxed{6}$ On donne la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ comme :

$$F(t)=\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1;1[}(t)+\frac{3}{4}\mathbb{1}_{[1;2[}(t)+\mathbb{1}_{[2;+\infty[}(t)$$

1. Démontrer que $F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$.
2. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

**Exercice** $\boxed{7}$ On se donne une urne contenant deux boules blanches et $n$ boules noires $(n \in \mathbb{N}^*)$. On procède à des tirages successifs sans remise des boules de cette urne.

1. Soit $T$ la variable aléatoire renvoyant le numéro du tirage de l'obtention de la première boule blanche.
   Donner la loi de $T$ puis décrire sa fonction de répartition $F_T$.
2. Soit $T'$ la variable aléatoire renvoyant le numéro du tirage de l'obtention de la seconde boule blanche.
   Donner la loi de $T'$ puis calculer $\mathbb{E}[T']$

## Cas fini : avec les lois de référence

**Exercice** $\boxed{\textbf{8}}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On lance un dé à 10 faces (un $D10$), supposé non truqué, $n$ fois ($n \in \mathbb{N}^*$) et on note $X$ le nombre de fois où le nombre “un" est obtenu.

1. Rappelez la loi de $X$ (en fonction de $n$). En donner l'espérance, la variance et l'écart-type.
2. On joue au jeu dans lequel un parieur paie $m > 0$ euros de droit d'entrée et est rémunéré 5 euros par “un" obtenu au cours des $n$ lancers.
   Décrivez la loi du gain (algébrique) à ce jeu puis en donner l'espérance en fonction de $m$. Comment le rendre équitable ?

**Exercice** $\boxed{\textbf{9}}$ Dans un supermarché, on dispose de 150 boîtes de gâteaux indiscernables pour les clients. Malheureusement, une colonie de bactéries désagréables a envahi douze d'entre elles sans que cela ne se voit de l'extérieur.
Si, au cours de la première journée de ventes, 25 clients achètent effectivement une (et une seule) boîte de ces gâteaux, quelle est la loi du nombre $B$ de boîtes de gâteaux achetées parmi ces clients qui contiendront des membres de l'horrible colonie bactériennes ?

**Exercice** $\boxed{\textbf{10}}$ On lance un $DN$ avec $N \geq 2$. On note $R$ le résultat obtnu. On lance ensuite un $DR$ (c'est donc un DéDé-$N$) et on note $X$ son résultat.
Déterminer la loi de $X$ puis en déduire $\mathbb{E}[X]$.

**Exercice** $\boxed{\textbf{11}}$ Dans une famille de $N$ enfants (avec $N \geq 1$), si l'on considère équiprobables et indépendantes les naissances de filles et de garçons, quelle est la loi de nombre $X$ de filles ? Du nombre $Y$ de garçons ?

**Exercice** $\boxed{\textbf{12}}$ **Un problème de Poissons**
Un étang possède possède $N \geq 1$ poissons. Au cours d'une première pêche, on attrape $r \geq 1$ poissons que l'on marque (en bons scientifiques) puis on les relâche (on ne les a pas abîmés).
On procède ensuite à une seconde pêche au cours de laquelle ont attrape une nouvelle série de $n \geq 1$ poissons et on note $K$ le nombre de poissons marqués au cours de cette seconde pêche.
On supposera que, le temps séparant les deux pêches permet d'admettre l'indépendance des tirages entre ces deux pêches. De plus, l'étang est suffisemment trouble pour que chaque pêche soit assimilée à une successions de tirages aléatoires équiprobables (parmi les poissons restant de l'étang)

1. Quelle est la loi de $K$ ? On notera $p_N(k)$ la valeur $\mathbb{P}[K = k]$ dans la suite.
2. Pour $k$ n'annulant pas $p_{N-1}(k)$, déterminer le rapport $r_N(k) = \dfrac{p_N(k)}{p_{N-1}(k)}$ en fonction de $N \geq 2$.
3. Démontrer que, pour $k$ fixé vérifiant $k \leq r \leq N$, la suite $(p_N(k))_{N\geq 1}$ atteint un maximum.
4. On suppose $N$ inconnu et $k = K(\omega)$ une observation réalisée, connue, de $K$. Comment interpréter les résultats précédants ?

**Exercice** $\boxed{\textbf{13}}$ Dans une population de 500 personnes prises au hasard, quelle est la probabilité d'avoir exactement trois personnes qui fêtent leur anniversaire le 1er Avril ?

**Exercice** $\boxed{\textbf{14}}$ Lors d'une réunion entre douze membres d'équipe, règle est fixée qu'une décision est prise lorsqu'au moins trois quart de l'assemblée est unanime sur la décision à prendre.
Or, sur un sujet donné, la probabilité que chaque membre, indépendamment des autres, vote *Pour* une certaine décision est de $\dfrac{3}{4}$. Quelle est la probabilité qu'à l'issue de la réunion, le vote à propos de ce sujet amène un *Pour* ?

**Exercice** $\boxed{\textbf{15}}$ On dispose d'un dé truqué ayant une probabilité $p$ de tomber sur la face 1. Après avoir effectué $n$ lancés successifs et indépendants, on a admet qu'il a été possible d'attester que l'expérience réalisée soit une loi $\mathcal{B}(n;p)$ d'espérance $0,4$ et d'écart-type $0,6$.

Quelle est la probabilité d'obtenir un “un" avec ce dé ?

**Exercice** $\boxed{16}$ une variable aléatoire $U$ suit une loi $\mathcal{U}[\![a;b]\!]$ d'espérance nulle et de variance 14.

Quelles sont les valeurs de $a$ et $b$ ? Proposez une expérience aléatoire réalisable avec des dés qui suive cette loi.

**Exercice** $\boxed{17}$ **d'après contrôle Ens D2 -2021**

Pour chaque situation décrite, on définit une variable aléatoire associée.

En justifiant très soigneusement, précisez la loi suivie par la-dite variable ; vous indiquerez ensuite les valeurs d'espérance et de variance en simple référence en cours (formule générale puis, le cas échéant, valeurs numériques)

1. Dans un supermarché de l'ancien monde, ouvert de 8h30 à 21h00, on décide cherche à étudier la niveau de vente d'une certaine gamme de produits mis en rayon, assujettis à une offre spéciale.

   Le jour de l'étude, considéré comme représentatif, ce supermarché dispose de 1 000 unités en stock. Les capacités d'accueil de ce magasin ne permettront pas d'accueillir plus de 500 clients au cours de cette même journée (par client, on entendra, en pratique, passage en caisse)

   On estime que chaque client a une probabilité $p$ de procéder à l'achat d'un produit de la gamme étudiée. De plus, l'offre limite l'achat à une seul unité par passage en caisse.

   Soit $X$ le nombre de produits effectivement achetés au cours de cette journée d'étude dans ce supermarché. Si $C$ désigne le nombre effectivement (non nul) de passages en caisse effectués ce jour, quelle est la loi suivie par $X$ ? On en précisera l'espérance et la variance.

2. Le professeur Kuro [1] est soumis à un test très particulier : le directeur de l'établissement où il enseigne souhaite tester ses compétences dans chacune des onze matières enseignées.

   Pour cela, il lui demande de répondre à une série de questions provenant d'ouvrages d'exercices en un temps limité. Pour chacun de ces exercices, indépendamment les uns des autres, le professeur Kuro a une probabilité $q$ (très proche de 1, mais non égale à 1) de répondre à la question durant le temps imparti.

   On désignera par $N$ le nombre d'exercices tentés par le professeur lors de son premier échec. En imaginant que le directeur à accès une source intarissable d'exercices, quelle serait la loi de probabilité suivie par $N$ ? En donner l'espérance et la variance.

   *NB : si vous connaissez la référence attention, la situation a été modifiée pour que vous ne puissiez pas utiliser directement les calculs proposés dans l'épisode !*

3. $P$ joueurs jouent à la courte paille : on dispose à cet effet d'autant de batonnets de bois que de joueurs, chaque bâtonnet étant de taille distincte des autres.

   Le principe consiste en le tirage d'exactement un bâtonnet par joueur, les uns après les autres, et ce, sans qu'aucun joueur ne puisse déterminer la taille d'une paille avant de procéder au tirage [2]

   On désigne par $T$ le rang du joueur qui va effectivement tirer le bâtonnet le plus court (*la courte paille*). Quelle est la loi suivie par $T$ ? En fournir l'espérance et la variance.

4. Il me manque 10 centimes pour mon café ! Il est 7h42... Chaque collègue rencontré a une même probabilité $p \in ]0;1[$ (ils sont tous aussi gentils les uns que les autres) de me donner ce qu'il manque et bien sûr, aucun ne serait être influencé par les autres. Enfin, j'ai une quantité de collègues inépuisable (c'est beau d'être entouré)

   Si $D$ désigne le nombre de fois où il me faudra demander ces précieux centimes à un collègue (ou une collègue tout aussi bien par ailleurs) avant de parvenir à payer mon café, quelle loi suit $D$ selon les hypothèses formulées ? On en donnera l'espérance et la variance.

5. On dispose d'un gros sac composé de $R$ haricots rouges et de $B$ haricots blancs. Il n'y pas de haricot bicolore. On suppose que l'on prélève $h$ haricots de ce sac *à l'aveugle*, en une seule poignée, sans épuiser le sac.

   On cherche à déterminer le nombre $X$ de haricots rouges piochés, en admettant que la poignée sera prélevée sans trucage. Quelle est alors la loi suivie par $X$, et quels en seraient les paramètres d'espérance et variance associés ?

1. librement adapté de *assassination classroom*
2. Saïki -ni toute personne de sa classe d'équivalence- ne joue pas ni n'aide personne

## Cas discret infini : généralités

**Exercice** $\boxed{18}$ Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série absolument convergente à termes réels non tous nuls.

1. Justifier qu'il existe une variable aléatoire $X$ sur un certain espace probabilisé et une constante $c > 0$ telle que la loi de $X$ soit donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[X = k] = c|u_k|$$
2. On considère la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n^2 + 1)\lambda^n$ où $\lambda \in ] - 1; 1[$.
justifier que cette série converge absolument.
3. Justifier l'existence de $X$ variable aléatoire sur un certain espace de probabilisé pour laquelle il existe une constante $c > 0$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[X = k] = c(k^2 + 1)|\lambda|^k$$
Déterminez ensuite la constante $c$.
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$ après en avoir justifié l'existence.
5. Décrire une expérience aléatoire pouvant être modélisée par la variable aléatoire $X$.

**Exercice** $\boxed{19}$ **D'après EML - 2014 voie E**

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 2}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$ et dont les lois (indépendantes) respectives sont données par :
$$\forall n \geq 2 \forall k \in [\![2; n + 1]\!] \quad \mathbb{P}[X_n = k] = \frac{k - 1}{n^k}\binom{n + 1}{k}$$

1. Vérifier que, pour tout $n \geq 2$ on a bien $\sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}[X_n = k] = 1$
2. Démontrer que, pour tout $k \geq 2$ fixé on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \frac{k - 1}{k!}$
3. Démonter que la série $\sum_{k\geq 2} \frac{k - 1}{k!}$ converge et calculer sa somme.
On admettra alors qu'il existe une variable aléatoire $Z$ vérifiant $Z(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ et pour laquelle $\mathbb{P}[Z = k] = \frac{k - 1}{k!}$
4. Etablir la convergence de la série $\sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}[Z = k]$ et en calculer sa valeur.
5. Comparer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n]$ avec $\mathbb{E}[Z]$.
*Indication :* On pourra vérifier que $\mathbb{P}[X_n > k] = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$

**Exercice** $\boxed{20}$ Soit $p \in ]0; 1[$. On suppose que la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F(n) = 1 - (1 - p)^n$$
Donner la loi de $X$.

## Cas discret infini : avec les lois de référence

**Exercice** $\boxed{21}$ **les petits chevaux** Au jeu des petits chevaux, on lance un $D6$ à chaque tour jusqu'à obtention d'un 6 permettant de faire sortir son premier cheval de l'écurie et, pour ainsi dire, de débuter le jeu à proprement parler.

On note $T$ le nombre de tours écoulés au moment de la sortie du premier cheval.

Quelle est la loi de $T$ ? Déterminer $\mathbb{E}[T]$ et $\mathbb{V}[T]$.

**Exercice** $\boxed{22}$ Une variable aléatoire $N$ définie sur un espace probabilisé suit une loi de Poisson de paramètre 5.

$X$ désigne une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé. Enfin, on pose $Y = N - X$. On suppose enfin que $N, X, Y$ sont à valeurs entières positives et que pour tout $(n; k) \in \mathbb{N}^2$, si $k \leq n$ alors :

$$\mathbb{P}_{[N=n]}[X = k] = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

1. Démontrer que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$
2. Déterminer la loi de $Y$
3. Pour tout $(k; j) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}[X = k \cap Y = j]$ et comparer avec la valeur de $\mathbb{P}[X = k] \times \mathbb{P}[Y = j]$

**Exercice** $\boxed{23}$ Soit $\theta > 0$ fixé. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta)$.

On définit $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Démontrer que $Y$ admet un espérance puis la déterminer.

**Exercice** $\boxed{24}$ *Polynôme à racines aléatoires*

On se donne une variable aléatoire $X$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la probabilité que $P(t) = t^2 - 2Xt + X$ ademtte des racines réelles distinctes.
2. On note $S$ l'abscisse du sommet de la parabole représentant la fonction $P$. Quelle est la valeur de $\mathbb{E}[S]$ ?
3. Peut-on choisir $\lambda$ pour que la probabilité que cette même parabole passe par le point de coordonnées $(X; X)$ excède $50\%$ ?

**Exercice** $\boxed{25}$ *Qu'est-ce qu'un entier aléatoire ?*

On considère une variable aléatoire $X$ définie sur un espace probabilisable $(\Omega\ ;\ \mathcal{A})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

On notera $p_k$ la valeur de $\mathbb{P}[X = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$ et en déduire qu'il n'existe pas de loi de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$
2. Que pensez-vous de la phrase *" on tire un entier aléatoire"* ?
3. Vérifier que $X$ *est pair* constitue bien un événement et en déduire que $X$ *est impair* également.
   On notera $[X \in 2\mathbb{N}]$ et $[X \in 1 + 2\mathbb{N}]$ respectivement ces deux événements.
   (a) On suppose que $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p > 0$.
   Existe-il une valeur de $\lambda$ pour laquelle $\mathbb{P}[X \in 2\mathbb{N}] = \mathbb{P}[X \in 1 + 2\mathbb{N}]$ ?
   (b) On suppose que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   Existe-il une valeur de $\lambda$ pour laquelle $\mathbb{P}[X \in 2\mathbb{N}] = \mathbb{P}[X \in 1 + 2\mathbb{N}]$ ?
4. Bernard, Polytechnicien, déclare :

   *"Un groupe de personnes se présente, sans que l'on puisse connaître à l'avance le nombre d'individus. La probabilité d'obtenir un nombre pair de personnes est forcément* $\dfrac{1}{2}$*"*

   Que pensez-vous de cette allégation ?

**Exercice** $\boxed{26}$ **D'après ... référence perdue**

Une urne contient des boules blanches et des boules noires (les concepteurs de sujets de concours EC en raffolent !)

La proportion de boules blanches est $p$ et la proportion de boules noires est $q$.

1. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès qu'on a obtenu une boule noire.
   On notera $T$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages successifs effectués et $U$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
   (a) Reconnaître la loi de $T$, en donner l'espérance et la variance.
   (b) En déduire que $U$ admet une espérance et la déterminer. Que vaut $\mathbb{V}(U)$ ?
2. Dans cette question, on effectue des tirages successifs aevec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une seconde boule noire.
   On note $S$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Déterminer $S(\Omega)$ et calculer les valeurs de $\mathbb{P}[S = 2]$ et $\mathbb{P}[S = 3]$
   (b) Pour $k \geq 3$, déterminer la valeur de $\mathbb{P}[S = k]$
   (c) Démontrer que $S$ admet une espérance et la calculer.
   (d) Justifier que $S$ admet une variance et la calculer.

**Exercice** $\boxed{27}$ **D'après ENS-D2 2017**

1. On dispose de deux dés cubiques : l'un est pipé de façon à n'obtenir *que* des 6 et l'autre est équilibré et possède bien les six numéros usuels (c'est un $D6$).
   Pour identifier le dé pipé, on utilise la méthode suivante : on lance les deux dés jusqu'à obtention d'un tirage différent de 6 pour l'un des deux dés. On note $I$ le nombre de tirages nécessaires à l'identification.
   (a) Quelle est la probabilité d'avoir à faire un second tour ?
   (b) Quelle est la probabilité que $I = 2$ ?
   (c) Déterminer de façon générale $\mathbb{P}[I = k]$
   (d) Quelle est l'espérance de $I$ ?
2. On dispode toujours de deux dés que l'on *croit* être de même nature que précédamment mais qui sont en réalité deux dés habituels non pipés (deux $D6$).
   On reprend le protocole précédant jusqu'à identifier (faussement) un dé pipé ou que l'on s'aperçoive qu'en réalité, aucun des deux dés n'est pipé.
   La notation $I$ désigne encore le nombre de tirages effectués au cours de l'expérience, mais $I = 0$ désigne le fait de découvrir la supercherie (i.e. aucun dé n'est pipé).
   (a) Quelle est la probabilité que $I = 1$ dans ce nouveau contexte ?
   (b) Déterminer pour $k \in \mathbb{N}^*$ la valeur $\mathbb{P}[I = k]$ et en déduire la probabilité d'avoir $I = 0$.
   (c) Déterminer l'espérance de $I$
   (d) Quelle est la probabilité de $I = k$ sachant $I > 0$ réalisé, pour $k \in \mathbb{N}^*$ ?
   (e) Vérifier que les valeurs précédantes forment une loi de probabilité notée $\mathcal{L}$
   (f) Calculez l'espérance de $X \hookrightarrow \mathcal{L}$

**Exercice $\boxed{28}$ Avec des Matrices et des couples**

Pour tout couple $(a,b)$ de $\mathbb{R}^2$, soit $M$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on suppose que $a$ et $b$ ont été choisis, indépendamment, dans l'intervalle d'entiers $[\![-n\ ;\ n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
   (a) Combien de telles matrices peut-on alors former au total ?
   (b) Combien de telles matrices sont inversibles ? Symétriques ?
   (c) Est-il possible d'obtenir ainsi une matrice inversible et symétrique ?
2. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1.
   Dans cette question, on considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres $n$ et $\dfrac{1}{2}$.
   Soit $N$ la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et $A$ l'événement : " la matrice $N$ est inversible ".
   (a) Pour $x$ réel, écrire les développements de $(x+1)^n$ et $(x+1)^{2n}$ à l'aide de la formule du binôme.
   (b) En utilisant l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n\,(x+1)^n$, montrer que l'on a : $\dbinom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.
   (c) En déduire la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X=k]\right)\mathbb{P}\left([Y=k]\right) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.
   (d) On admet dans cette question que $\mathbb{P}\left([X=Y]\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X=k]\right)\mathbb{P}\left([Y=k]\right)$ .
   Calculer $\mathbb{P}\left(A\right)$ en fonction de $n$.

*[D'après ESCP 2015 série T]*