.

Applications linéaires

Exercice $\boxed{\mathcal{L}}$ Pour chaque application proposée, dire si elle est linéaire de E vers F pour les espaces proposés :

1 $x \mapsto 2x^2$
$(E = \mathbb{R}\ ;\ F = \mathbb{R})$

2 $(x;y) \mapsto 2x - 4y + 2$
$(E = \mathbb{R}^2\ ;\ F = \mathbb{R})$

3 $(x;y;z) \mapsto (x+y\ ;\ y-z\ ;\ z+2x\ ;\ 3x+4y-\frac{1}{3}z)$
$(E = \mathbb{R}^3\ ;\ F = \mathbb{R}^4)$

4 $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$(E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

5 $(x_1; \dots ; x_n) \mapsto \max_{i \le n} x_i$
$(E = \mathbb{R}^n\ ;\ F = \mathbb{R})$

6 $(x;y;z) \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
$(E = \mathbb{R}^3\ ;\ F = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$

7 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$
$(E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ F = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$

8 $(x;y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}$
$(E = F = \mathbb{R}^2)$

9 $M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} M$
$((E = \mathcal{M}_{3,8}(\mathbb{R})\ ;\ F = \mathcal{M}_{3,8}(\mathbb{R}))$

10 $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ \dots\ ; x_{n-1}\ ;\ x_n)$
$(E = \mathbb{R}^n\ ;\ F = \mathbb{R}^{n-2})$

Parmi les applications linéaires, lesquelles sont des endomorphismes ?

Exercice $\boxed{1}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne, pour $1 \le k \le n$, une application π_k définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\pi_k(chu) = x_k$ où l'on note $chu = (x_1\ ;\ x_2\ \ \dots\ ;\ x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Etablir que π_k est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On l'appelle *projection canonique selon la kième coordonnée*.

Exercice $\boxed{2}$ Soit E un espace vectoriel. Etablir que les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E \times E & \longrightarrow & E \times E \\ (x;y) & \mapsto & (y;x) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} \psi : E & \longrightarrow & E^3 \\ x & \mapsto & (x\ ;\ \pi \cdot x\ ;\ \sqrt{2} \cdot x) \end{array}$$

Exercice $\boxed{3}$ Pour une série statistique quantitative de valeurs réelles $x_1;\ x_2\ ;\ \cdots\ ; x_n$, on désigne par $\bar{x}$ sa moyenne et σ_x son écart-type.
Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul fixé.

1. Démontrer que l'application $(x_1 \dots x_n) \mapsto \bar{x}$ est linéaire en précisant les espaces de départ et d'arrivée. Qu'en est-il de $(x_1 \dots x_n) \mapsto \sigma_x$?
2. Soient $P = (p_i)_{i \le n}$ une n-liste de *poids* strictement positifs. On rappelle que la moyenne pondérée par les poids $p_1 \dots p_n$ se calcule :
$$\mu_P(x) = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$
Etablir que $\mu_P : x \mapsto \mu_P(x)$ est également linéaire sur les mêmes espaces.
3. On fixe $x = (x_1 \dots x_n)$. Peut-on dire que $\psi : P \mapsto \mu_P(x)$ est linéaire ?
4. Déterminer la dimension de $ker(\mu_P)$. En donner une représentation graphique pour $n = 2$ avec $p_1 = p_2 = 1$.

Exercice $\boxed{4}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On se place dans l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$.

1. Démontrer que $trans : X \mapsto {}^tX$ est linéaire et en déterminer le noyau. En déduire que $trans$ est un automorphisme de E.
2. On définit sur E l'application *trace* notée tr par : $tr : X \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_{kk}$.
   Justifier que X est une forme linéaire de E puis déterminer une base et la dimension de son noyau.
3. L'application $det : M \mapsto det(M)$ est-elle linéaire sur E ?

Exercice $\boxed{5}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On se donne φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\varphi(x;y;z) = (3x - 2y + z; 2y - z)$.
Identifier $ker(\varphi)$ ainsi $Im(\varphi)$ en précisant les espaces vectoriels de référence dans lesquels ils sont inclus.

Exercice $\boxed{6}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On considère une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\varphi(2;1) = (1;0;1) \quad ; \quad \varphi(-1;1) = (0;1;1)$$

Démontrer qu'il existe une unique φ ainsi définie et déterminer son noyau et son image.

Exercice $\boxed{7}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On se donne φ définie sur $\mathbb{R}^2$, une application linéaire dont le noyau est $K = vect(1;-2)$ et l'image $vect(2;1;0)$.
Décrire une telle application φ au moyen de son expression générale, identifier ses espaces de départ et d'arrivée.
Y-a-t-il unicité d'une telle application φ ?

Exercice $\boxed{8}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On note $(e_1;e_2;e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose ensuite, pour $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$:

$$\varphi(e_1) = e_2 - e_3 \quad ; \quad \varphi(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \quad ; \quad \varphi(e_3) = e_1 - 4e_2 + e_3$$

Expliciter $\varphi(x;y;z)$ de façon générale et déterminer noyau et image de φ. Cette application est-elle un isomorphisme ?

Exercice $\boxed{9}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On considère les applications u et v définies sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$u(x;y;z;t) = (x;-y;x+z;2t) \quad ; \quad v(x;y;z;t) = (y;x;x-z;t)$$

1. Vérifier que u et v sont des automorphismes.
2. Justifier que $u + v$ et $u - v$ sont des applications linéaires. Sont-ce des automorphismes ?

Exercice $\boxed{10}$ *Une caractérisation à retenir*
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer qu'on a :

$$E = ker(f) \oplus im(f) \quad \Leftrightarrow \quad ker(f) = ker(f^2) \ \wedge \ im(f) = im(f^2)$$

Exercice $\boxed{11}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ *Une étude des hyperplans*
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note φ une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que, si φ est non nulle, le noyau de φ est de dimension $n - 1$.
2. Justifier que la matrice de φ dans la base canonique est une matrice ligne.
   On note alors $A = (a_1; \ldots; a_n)$ cette matrice ligne.
3. Justifier que le noyau de φ s'écrit $\{(x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$.
4. Etablir que tout ensemble de la forme $\{(x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est le noyau d'une forme linéaire.
5. En déduire que les solutions de tout système linéaire homogène forment un espace vectoriel.

Exercice $\boxed{12}$ *A partir des matrices*

Les matrices suivantes représentent des applications linéaires dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$. Donner les noyau et image respectifs de ces applications (dont on donnera une base et la dimension).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -13 & 24 & -4 \\ 6 & -12 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice $\boxed{13}$ *Donner les matrices*

1. Pour chaque application définie, vérifier qu'elle est linéaire puis donner sa matrice relativement aux bases canoniques. On veillera à identifier si besoin les espaces vectoriels de départ et d'arrivée.
   (a) L'application $f : (x; y) \mapsto (2x - y; 3y)$
   (b) L'application $g : (x; y; z; t) \mapsto (z - x; y + 2t; x + y + z - t)$
   (c) L'application $h : (x; y; z) \mapsto (x + y + z; 3z - 2y)$
   (d) L'application $M_A : X \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} X$ avec $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
2. Pour chacune des applications précédentes, déterminer l'image et le noyau. On indiquera leurs dimensions respectives.

Exercice $\boxed{14}$ On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ admettant pour matrices respectives, relativement aux bases canoniques :

$$Mat_f = A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad Mat_g = B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (u_1; u_2; u_3)$ avec $u_1 = (1; -1; 1)$ et $u_2 = (1; 0; 0)$ et $u_3 = (0; -1; 2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les matrices de f et g relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. Démontrer que $\mathcal{C} = (u_3 - u_1 + 2u_2; u_2 - u_1; u_1)$ avec $v_1 = (1; 0; 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les matrices de f et g relativement à la base $\mathcal{C}$.

Exercice $\boxed{15}$ Déterminer les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice $\boxed{16}$ Déterminer, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$.

Dans le cas où A serait inversible, préciser son inverse.

Exercice $\boxed{17}$ Pour a et b deux réels donnés, on définit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Démontrer que $rg(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et de b a-t-on $rg(A) = 2$?

Exercice $\boxed{18}$ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On définit un endomorphisme f de E tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Justifier que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$. A-t-on f projecteur ?

Exercice $\boxed{19}$ Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et expliciter les sous-espaces propres associés.

Exercice $\boxed{20}$ On rappelle que la matrice Attila d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est la matrice $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des uns.
Retrouver la relation liant H_n^k avec H_n (pour $k \in \mathbb{N}^*$) et en déduire les valeurs propres de H_n. Quel est le rang de H_n ?

Exercice $\boxed{21}$ *(D'après EML 2014 voie E)*

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ ; \ (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
2. On note $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit f sur F par $f(N) = TNT$. Justifier que $f \in GL(F)$.
3. La famille $\mathcal{B} = (E_{1\,1}\ ;\ E_{1\,2}\ ;\ E_{2\,1}\ ;\ E_{2\,2})$ désigne la base canonique de E.
   Démontrer que la sous-famille $\mathcal{A} = (E_{1\,1}\ ;\ E_{1\,2}\ ;\ E_{2\,2})$ est une base de F.
4. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(f)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{A}$.
5. Etablir que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $S_\lambda = \{M \in F\ ;\ f(M) = \lambda M\}$ est un sous-espace vectoriel de F.
6. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels S_λ est de dimension non nulle.

Exercice $\boxed{22}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A puis son polynôme minimal et en déduire A^3, A^5 et A^{-1}.

Exercice $\boxed{23}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et déterminer les espaces propres correspondants.

En déduire l'écriture d'une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Calculer alors A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{24}$ Dans le cas général d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, expliciter le polynôme caractéristique $P_A(X)$.

En déduire une étude du spectre de A et proposer alors une étude de diagonalisabilité de A.

Exercice $\boxed{25}$ On donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Pour chacun des espaces propres, construire une base. On mentionnera la dimension de chaque espace propre.
3. Vérifier que ces espaces sont en somme directe.
4. En déduire l'écriture d'une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Exercice $\boxed{26}$ On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Indiquer pour chacune si elle est, ou non, diagonalisable.

Exercice $\boxed{27}$ *(D'après concours ENS-D2 Paris-Saclay 2016)*

On considère les applications u et v définies par :

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (z_1; z_2; z_3) & \mapsto & (2z_1 - z_3; 3z_1 + z_2 + 2z_3) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} v : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (z_1; z_2) & \mapsto & (z_1 + z_2; -z_2; 2z_1 - z_2) \end{array}$$

1. Vérifier que u est une application linéaire et en donner la matrice H relativement aux bases canoniques.
2. Donner, de même, la matrice K de v relativement aux bases canoniques.
3. Déterminer le noyau de u. L'application u est-elle injective ? Procéder de même avec v.
4. Déterminer l'image de u. L'application u est-elle surjective ? Procéder de même avec v.
5. Calculer le produit HK et établir que $(HK)^2 = \lambda I_2$ où l'on déterminera le réel λ.
6. Démontrer sans calcul que HK est inversible. Quelles en sont les valeurs propres ?
7. Déterminer $(u \circ v)^2$

Exercice $\boxed{28}$ *(D'après oral HEC -voie E)*

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on note D et T les applications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} D : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array}$$

1. Démontrer que T est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Qu'en est-il de D ?
2. Démontrer que $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ \ \forall B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad D(AB) = D(A)D(B) \ \wedge \ T(AB) = T(BA)$
3. On suppose qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP = B$. Démontrer qu'alors $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.
4. Déterminer $Ker(T)$. On en donnera une base et la dimension.
5. Quelles sont les valeurs propres de T ?

Exercice $\boxed{29}$ *(D'après oral HEC -voie E)*

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de représentation dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $2f - f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$. L'application f est-elle un projecteur ?
2. Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. En donner l'automorphisme réciproque.
3. Démontrer que la seule valeur propre de f est 1. Décrire l'espace propre associé.
4. Démontrer qu'on ne peut trouver de matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. Calculer explicitement A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.