.

Introduction aux densités

Exercice $\boxed{\textbf{CV}}$ Pour chaque intégrale proposée, déterminer si elle converge ou non.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)}dx$ (3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^x dx$ (4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ (7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{sh(t)}dt$ (8) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^2-t}{\sqrt{1-t}}dt$

Exercice $\boxed{1}$ **Introduction d'une célèbre fonction**

La fonction Gamma (notée Γ) est définie au moyen de l'intégrale impropre :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale définissant $\Gamma(x)$ converge. Qu'en est-il pour $x \leq 0$?
2. Calculer $\Gamma(1)$.
3. Démontrer que, pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ \Gamma(n+1) = n!$.
   NB : L'étude, aussi bien que la connaissance de cette fonction peuvent être des attendus de concours ensD2. Voir sujet 2014

Exercice $\boxed{2}$ *Densités simples*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par :

$$f_n(x) = \frac{a_n}{x^n\sqrt{x}}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)$$

où a_n désigne un réel ne dépendant pas de x.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $a_n \in \mathbb{R}$ pour lequel f est une densité de probabilités.
   Déterminer alors la constante a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire si $n = 0$?
2. Soit X_n une variable aléatoire de densité f_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Pour $n = 2$, démontrer que cette variable aléatoire admet une espérance mais pas de variance.
   (b) De façon générale, pour $n >$ entier naturel donné, pour quelles valeurs de r la variable aléatoire X_n admet-elle des moments d'ordre r ?
   (c) Démontrer l'existence puis déterminer la variance de X_n dans le cas où $n \geq 3$.
3. Déterminer explicitement la fonction de répartition F_n correspondant à la loi étudiée, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ puis en tracer la courbe dans le cas où $n = 2$.

Exercice $\boxed{3}$ *A partir de la fonction de répartion*

On définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{x^2-4}{x^2+5}\mathbb{1}_{[2;+\infty[}(x)$$

On admet que F est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X.

1. La variable X est-elle à densité ? Si oui, en donner une densité associée.
2. Déterminer $\mathbb{P}[k < X \leq k+1]$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. Reprendre les questions précédantes avec $G(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathbb{1}_{[2;+\infty[}$

Exercice $\boxed{4}$ *Première Loi de Laplace*

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

1. Démontrer que f est une densité de probabilités.
   On dira qu'une variable aléatoire X suit la (première) loi de Laplace lorsqu'elle admet f pour densité.
2. Soit X suivant la loi de Laplace. Etablir que X admet une espérance et calculer cette espérance.
3. Etablir que si X suit la loi de Laplace, alors X admet des moments nuls à tout ordre r impair.
4. Justifier que X suivant la loi de Laplace admet pour moments n pairs :

$$\mathbb{E}[X^n] = n!$$

Exercice $\boxed{5}$ **Loi Γ : d'après EnsD2 Paris-Saclay 2014**

On reprend la fonction Γ telle qu'elle a été définie en $\boxed{2}$. On introduit à présent, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R} \;\; f_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ \dfrac{e^{-u}u^{n-1}}{\Gamma(n)} & \text{sinon} \end{cases}$$

que l'on pourra aussi réécrire $f_n(u) = \dfrac{e^{-u}u^{n-1}}{\Gamma(n)} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$ si besoin, ou par commodité.

1. Véfifier que f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Soient $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
   Montrer que $\mathbb{P}[Y < n] = \mathbb{P}[X > \lambda]$

Exercice $\boxed{6}$ *Loi Logistique Standard*

On doit qu'une variable aléatoire réelle Z suit la loi logistique standard lorsque sa fonction de répartition est :

$$F_Z(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

1. Démontrer qu'une telle variable aléatoire Z est à densité et en donner une densité.
2. Démontrer que l'on peut choisir la densité paire.
3. Justifier que Z admet une espérance puis la déterminer.
4. Décrire une densité de la variable aléatoire $X = 3 - 2Z$

Exercice $\boxed{7}$ *D'après Oral-HEC voie E*

Soient k et λ deux réels. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = kte^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

1. Déterminer k en fonction de λ pour que f soit une densité de probabilité.
   X désignera dans la suite une variable aléatoire de densité f.
2. Justifier que X admet une espérance et la calculer.
3. Déterminer une densité de $Y = aX + b$ en fonction de a et de b.
4. Démontrer que X admet des moments d'ordre n que l'on calculera (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice $\boxed{8}$ *D'après Oral-HEC voie B/L*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$
On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket -1; 1 \rrbracket)$ et on note $Z = X\,Y$

1. Justifier que Z est une variable aléatoire et déterminer $Z(\Omega)$. La variable aléatoire Z est-elle discrète ?
2. Donner $\mathbb{P}[Z=0]$.
3. Décrire, pour $x\in\mathbb{R}$, l'expression de $F_Z(x)$ (fonction de répartition de Z en x).
4. Z est-elle à densité ?

Exercice $\boxed{9}$ *La loi Bêta*

On définit pour tout couple (r,s) de réels strictement positifs le nombre $B(r;s)$ par :

$$B(r;s)=\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}dx$$

1. (a) Vérifier que, pour tout $(r;s)\in]1;+\infty[^2$ l'application $x\mapsto x^{r-1}(1-x)^{s-1}$ est bien de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]0;1[$. En déduire que, sous cette condition, $B(r;s)$ est bien défini.
   (b) Soit $s>1$. Justifier qu'alors l'intégrale définissant $B(r;s)$ est bien convergente pour tout $r\in]0;1]$.
   (c) En déduire que $B(r;s)$ est toujours bien défini pour $r>0$ et $s>0$.
2. On définit ensuite une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\frac{1}{B(r;s)}x^{r-1}(1-x)^{s-1}\mathbb{1}_{]0;1[}(x)$$
   (a) Vérifier que f est une densité de probabilité pour tous $r>0$ et $s>0$.
   (b) Reconnaître la loi associée dans le cas où $r=s=1$
   (c) Décrire la fonction de répartition F associée à la densité f (pour $(r;s)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ fixé)
   On dit qu'une variable aléatoire X admettant une telle densité suit la loi Bêta de paramètres r et s.
3. On se place ici dans le cas où r et s sont entiers naturels non nuls.
   (a) Etablir que $\forall(p;q)\in\mathbb{N}^*\quad B(p;q+1)=\dfrac{q}{p}B(p+1;q)$
   (b) Calculer la valeur de $B(p;1)$ pour $p\in\mathbb{N}^*$
   (c) En déduire que :
$$\forall(p;q)\in(\mathbb{N}^*)^2\qquad \frac{1}{B(p;q)}=p\binom{p+q-1}{p}=q\binom{p+q-1}{q}$$
   (d) Démontrer alors qu'une variable aléatoire X suivant une loi Bêta de paramètres p et q admet une espérance.
   (e) Vérifier, dans ce cas, que cette espérance vaut $\mathbb{E}(X)=\dfrac{p}{p+q}$

Aucune donnée d'annale ne permet d'affirmer que cette étude peut faire l'objet d'un problème au concours ensD2. En revanche, il en était de même pour la loi Γ avant 2014. On peut donc envisager que scenario puisse se produire

Exercice $\boxed{10}$ *D'après HEC 2010*

On considère une variable aléatoire T à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{A};\mathbb{P})$ dont la fonction de répartition vérifie :

$$F_T(t)=\left(1-e^{-\lambda t}\right)^2\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\quad(\lambda>0\text{ constante})$$

Démontrer que T admet une espérance de $\dfrac{3}{2\lambda}$ et une variance de $\dfrac{5}{4\lambda^2}$

Exercice $\boxed{11}$ *D'après EML 2006*

On considère une variable aléatoire U suivant une loi normale centrée mais de variance $\frac{1}{2}$.

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.