.

Devoir $D_3(E1D2)$ bis

Durée : deux heures

Exercice 1

On appelle *anagramme* d'un mot tout écriture employant exactement les mêmes lettres, mais dans un ordre quelconque. Ainsi, le mot $TOTAL$ admet $LATOT$ comme anagramme.
On remarquera que l'on n'attribue aucune importance au sens (ou à l'absence de sens) du nouveau mot obtenu. On admettra, en particulier, qu'un mot est anagramme de lui-même.

Partie I : Etudes de cas particuliers

1. Avec lettres distinctes :
   (a) On considère le mot PLUME. Déterminer le nombre d'anagrammes de ce mot.
   (b) Déterminer le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres, toutes distinctes. Existe-t-il alors une valeur maximale que l'on peut attribuer à n dans ce cas ? Si oui, préciser laquelle.
2. Une seule lettre à répétition :
   (a) Dénombrer les anagrammes du mot EPHEMERE.
   (b) On se donne un mot de n lettres s'écrivant avec exactement k fois la lettre E. On suppose toutes les autres lettres distinctes. Démontrer qu'alors, le nombre d'anagrammes d'un tel mot est $A_n^{n-k} = \dfrac{n!}{k!}$
3. Mot cloisonnable en deux catégories de lettres
   (a) Combien d'anagrammes possède le mot ERRER ?
   (b) Démontrer que, si un mot de n lettres ne s'écrit qu'avec deux catégories distinctes de lettres de l'alphabet, alors on en dénombre les anagrammes avec un coefficient binômial que l'on définira

Partie II : Définition d'un coefficient adapté

On suppose de façon générale qu'un mot ω s'écrivant avec η lettres ($\eta \in \mathbb{N}^*$) contient exactement a fois la lettre A, exactement b fois la lettre B etc...

On définit un coefficient dit *multinomial* de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} & \eta & \\ n_1 & \dots & n_k \end{pmatrix} = \frac{\eta!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} = \frac{\eta!}{n_1! \dots n_k!}$$

où $k \leq \eta$ est un entier naturel et $n_1;\ n_2;\ \dots ; n_k$ sont des entiers naturels tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = \eta$.

1. Calculer les valeurs de $\begin{pmatrix} & 5 & \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} & & 8 & & \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. De façon générale, que peut-on dire du coefficient $\begin{pmatrix} \eta & \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}$?
3. Démontrer que, pour tous $\eta \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$ et $n_1;\ n_2;\ \dots ; n_k$ entiers naturels avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = \eta$, on a :

$$\begin{pmatrix} & \eta & \\ n_1 & \dots & n_k \end{pmatrix} = \binom{\eta}{n_1}\binom{\eta - n_1}{n_2} \dots \binom{\eta - (n_1 + \dots + n_{k-1})}{n_k}$$

4. Etablir que le nombre d'anagrammes d'un mot ω est :

$$\begin{pmatrix} & & \eta & & \\ a & b & \dots & y & z \end{pmatrix}$$

5. Quel est le nombre d'anagrammes du mot ANTICONSTITUTIONNELLEMENT ?
6. Un échiquier est composé de 64 cases repérées. Pour jouer, on a rangé dans une boîte les 32 pièces déclinées en deux couleurs, noires ou blanches.
   On rappelle que les pièces sont, pour chaque couleur : pions(8), tours(2), cavaliers(2), fous(2), reines(1) et rois(1).
   On décide de placer toutes les pièces sur l'échiquier, à raison d'une par case et ce, n'importe comment. Déterminer le nombre de façons que l'on a de réaliser cette expérience.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que : $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$.

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit $f(x)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que $g(t) = \dfrac{e^t}{t}$ et G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Pour tout réel $x > 0$, exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction G.

b) Déduire de la question précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

c) Calculer $f(1)$.

2.a) Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f(x) \geq e \times \ln x$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

3.a) Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, l'inégalité $f(x) \leq e^x \times \ln x$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité $1\ cm$ pour les abscisses et $e\ cm$ pour les ordonnées - *on rappelle que le nombre e est à peu près égal à $2,7$*) .

a) On note f'' la dérivée seconde de f. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f''(x)$.

b) Déterminer les coordonnées du point $A(a; f(a))$ tel que $f''(a) = 0$. .

c) Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.

d) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.

6.a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant $\displaystyle\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t = n$.

b) En utilisant les variations de la fonction f, montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

[D'après ESCP 2015 série T]