.

Devoir $D_3(E1D2)$

Durée : deux heures

Avant-Propos : Une interrogation d'une heure aura lieu durant la période en compensation de l'heure manquant à ce devoir pour respecter la règle :

$$\forall k \leq 4 \quad \text{time}(D_k(E1D2)) = k \cdot \text{heures}$$

[BONUS :] On pourra vérifier que $\{x \cdot \text{heures} \quad ; x \in \mathbb{R}\}$ munis des opérations usuelles d'addition $+$ et de multiplication scalaire $\cdot$ possède une structure d'espace vectoriel de dimension 1.

Exercice I : Suites d'intégrales

Les parties I et II sont mutuellement indépendantes.
Il est possible d'admettre tout résultat des parties I et II afin de traiter la partie III.

Partie I

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n dt$. On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2 par le calcul.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n dt$
   (b) Montrer que $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) On pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ dite *somme harmonique de rang n.*
   Etablir que, pour tout $n \geq 1$, on a $H_n \geq \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\, dt$.
   (d) Démontrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ définit une suite de limite $+\infty$.
   On dira que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ *diverge*
4. Etablir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

5. En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Partie II

Dans cette partie, on cherche à étudier le comportement asymptotique des intégrales de la forme :

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\, dt \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

dont on ne cherchera pas à fournir une valeur exacte.

1. Etablir que, pour tout entier naturel n, on a $\forall t \geq 1 \quad e^{-nt^2} \leq e^{-nt}$
2. Justifier de la convergence des intégrales de la forme $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-nt}\, dt$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-nt^2}\, dt$ puis établir que I_n est bien défni comme réel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On note $c = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$. Justifier que c est bien une constante réelle strictement positive.
5. A l'aide du changement de variable $x = t\sqrt{n}$ pratiqué sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} e^{-nt^2}\, dt$, expliciter la valeur de I_n en fonction de c et de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Démontrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Partie III

On se propose dans cette partie de déterminer simplement la limite de la suite (u_n).

1. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $1 - t^2 \leq e^{-t^2}$
2. En déduire que $u_n \leq I_n$
3. justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice II : Probabilités

Soit n un entier naturel au moins égal à deux donné.
On dispose d'un sac contenant des jetons indiscernables au toucher et numérotés de la sorte : un jeton porte le numéro $\boxed{1}$, deux jetons portent le numéro $\boxed{2}$ et de façon générale, pour k compris entre 1 et n, exactement k jetons portent le numéro $\boxed{k}$.
Pour chaque numéro $\boxed{\text{k}}$, on se donne une urne $\mathcal{U}_k$ qui contient exactement k^2 boules indiscernables au toucher. Parmi elles, k sont noires, les autres étant blanches.

On procède à un tirage en suivant le protocole suivant :

- On tire un jeton unique depuis le sac on note le numéro obtenu.
- On tire deux boules *sans remise* depuis l'urne qui porte le numéro $k \geq 2$. Si $k = 1$, on prend l'unique boule.
- On détermine si les boules sont de même couleur ou portent des couleurs distinctes

On notera U_k l'événement correspondant à "*les boules ont été tirées depuis l'urne* $\mathcal{U}_k$", pour $1 \leq k \leq n$.
On désignera par M l'événement correspondant à "*deux boules sont prélevées et elles sont de même couleur*", pour $1 \leq k \leq n$.

1. Déterminer le nombre total N de jetons dans le sac.
2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}[U_k]$ en fonction de k compris entre 1 et n.
3. (a) En justifiant, pour k compris entre 1 et n, donner une expression de $\mathbb{P}_{U_k}[M]$. Le résultat sera ensuite simplifié au mieux.
   (b) Etablir alors que, pour $1 \leq k \leq n$:
   $$\mathbb{P}[M] = 1 - 2\frac{n+1}{N} + 2\frac{H_{n+1}}{N}$$
   où l'on notera $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sans chercher à la calculer de façon explicite.

   Dans la suite de l'exercice, on pourra simplement désigner par p_n la valeur de $\mathbb{P}[M]$.
4. A l'issue d'un tirage, on constate que les boules tirées sont de même couleur mais on n'a pas conservé trace du numéro de l'urne utilisée pour le tirage.

   Quelle est la probabilité que le jeton extrait du sac comportait le numéro $\boxed{1}$? Même question avec le numéro $\boxed{n}$.
5. Déterminer de façon générale, pour $k \leq n$, la valeur de $\mathbb{P}_M[U_k]$ puis interpréter ce résultat dans le contexte proposé.
6. On propose :
   "*Si le numéro n le plus grand des jetons du sac devient arbitrairement grand, il est presque sûr que les boules tirées à l'issue de l'expérience soient de même couleur*"
   Discuter de cette proposition en vous appuyant sur un raisonnement mathématique.