Applications linéaires

Exercice $\boxed{\mathcal{L}}$ Pour chaque application proposée, dire si elle est linéaire de E vers F pour les espaces proposés :

1° $x \mapsto 2x^2$
$(E = \mathbb{R}\ ;\ F = \mathbb{R})$

2° $(x; y) \mapsto 2x - 4y + 2$
$(E = \mathbb{R}^2\ ;\ F = \mathbb{R})$

3° $(x; y; z) \mapsto (x + y\ ;\ y - z\ ;\ z + 2x\ ;\ 3x + 4y - \frac{1}{3}z)$
$(E = \mathbb{R}^3\ ;\ F = \mathbb{R}^4)$

4° $M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} M$
$(E = \mathcal{M}_{3,8}(\mathbb{R})\ ;\ F = \mathcal{M}_{3,8}(\mathbb{R}))$

5° $(x_1; \dots ; x_n) \mapsto \max_{i \leq n} x_i$
$(E = \mathbb{R}^n\ ;\ F = \mathbb{R})$

6° $f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t)dt$
$(E = \mathcal{C}^1([0; 1])\ ;\ F = \mathbb{R})$

7° $f \mapsto \dfrac{f}{1 + id_{\mathbb{R}}^2}$
$(E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})\ ;\ F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}))$

8° $(x; y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}$
$(E = F = \mathbb{R}^2)$

9° $P(X) \mapsto XP'(X) - P(X + 1)$
$(E = \mathbb{R}[X]\ ;\ F = \mathbb{R}[X])$

10° $f \mapsto \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right) \cdot \exp \circ (-id_{\mathbb{R}})$
$(E = \mathcal{C}^0([0; 1])\ ;\ F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}))$

Parmi les applications linéaires, lesquelles sont des endomorphismes ?

Exercice $\boxed{1}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne, pour $1 \leq k \leq n$, une application π_k définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\pi_k(chu) = x_k$ où l'on note $chu = (x_1\ ;\ x_2\ \dots\ ;\ x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Etablir que π_k est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On l'appelle *projection canonique selon la kième coordonnée*.

Exercice $\boxed{2}$ Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrer que l'application ν_a définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par $\nu_a(f) = f(a)$ est une application linéaire.
Quel en est l'espace d'arrivée ?

Exercice $\boxed{3}$ Soit E un espace vectoriel. Etablir que les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E \times E & \longrightarrow & E \times E \\ (x; y) & \mapsto & (y; x) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} \psi : E & \longrightarrow & E^3 \\ x & \mapsto & (x\ ;\ \pi \cdot x\ ;\ \sqrt{2} \cdot x) \end{array}$$

Exercice $\boxed{4}$ On considère l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

1. On nomme *suite finie* toute suite u vérifiant la propriété :
$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \geq n \quad u_p = 0$$
Vérifier que l'ensemble des suites finies forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On le notera $\mathbb{R}^{\omega}$.
2. Démontrer que l'application $\Sigma : u \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est linéaire de $\mathbb{R}^{\omega}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, à quelle condition $\Sigma(u)$ est-elle définie ?
On notera $\Sigma_{CV}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites vérifiant cette condition.
3. Justifier que $\Sigma_{CV}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et établir que $\Sigma \in \mathcal{L}(\Sigma_{CV}(\mathbb{R})\ ;\ \mathbb{R})$.
Calculer alors $\Sigma(u)$ avec u définie par $u_n = \dfrac{\pi^{n/2}}{(n+2)!}$ (On vérifiera au préalable que $u \in \Sigma_{CV}(\mathbb{R})$).

Exercice $\boxed{5}$ On considère l'application D définie de E dans F, sous espaces-vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, par $D : f \mapsto f'$.

1. Etablir que si $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on a bien D linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?
2. Etablir que si $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ on a bien D linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?
3. Etablir que si $E = F = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ on a encore D linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice $\boxed{6}$ On définit sur l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles les applications φ et ψ par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

1. Démontrer que φ et ψ sont des applications linéaires. Sont-ce des endomorphismes ? Si oui, précisez de quel espace.
2. Justifier que φ est surjective mais non injective.
3. Déterminer le noyau $ker(\psi)$ de ψ, c'est-à-dire l'ensemble :
$$ker(\psi) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ \mid \ \psi(u) = (0)\}$$
L'application ψ est-elle injective ?
4. Déterminer l'image $\psi(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par ψ. L'application ψ est-elle surjective ?

Exercice $\boxed{7}$ On considère l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables aléatoires discètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega \ ; \ \mathcal{A} \ ; \ \mathbb{P})$. On admettra que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On notera $\mathcal{L}^p$ l'ensembles des éléments de $\mathcal{V}$ qui admettent un moment d'ordre p.

1. Démontrer que $\mathbb{E}$ est une forme linéaire non injective de $\mathcal{L}^1$.
2. Qu'en est-il de l'application m_r définie sur $\mathcal{L}^r$ associant le moment d'ordre r pour $r \in \mathbb{N}$?
3. Justifier que, ni $\mathbb{V}$ ni σ ne sont des applications linéaires sur $\mathcal{L}^2$.

Remarque : Dans le cas général, Ω étant donné, la notation $\mathcal{L}^p(\Omega)$ est conventionnelle.

Exercice $\boxed{8}$ On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP' - 4P$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer le degré de $\varphi(P)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul.

Exercice $\boxed{9}$ Pour une série statistique quantitative de valeurs réelles $x_1; \ x_2 \ ; \ \cdots \ ; x_n$, on désigne par $\bar{x}$ sa moyenne et σ_x son écart-type.
Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul fixé.

1. Démontrer que l'application $(x_1 \ldots x_n) \mapsto \bar{x}$ est linéaire en précisant les espaces de départ et d'arrivée. Qu'en est-il de $(x_1 \ldots x_n) \mapsto \sigma_x$?
2. Soient $P = (p_i)_{i\leq n}$ une n-liste de *poids* strictement positifs. On rappelle que la moyenne pondérée par les poids $p_1 \ldots p_n$ se calcule :
$$\mu_P(x) = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$
Etablir que $\mu_P : x \mapsto \mu_P(x)$ est également linéaire sur les mêmes espaces.
3. On fixe $x = (x_1 \ldots x_n)$. Peut-on dire que $\psi : P \mapsto \mu_P(x)$ est linéaire ?
4. Déterminer la dimension de $ker(\mu_P)$. En donner une représentation graphique pour $n = 2$ avec $p_1 = p_2 = 1$.

Exercice $\boxed{10}$ On se place dans l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$.

1. Démontrer que $trans : X \mapsto \ ^tX$ est linéaire et en déterminer le noyau. En déduire que $trans$ est un automorphisme de E.

2. On définit sur E l'application *trace* notée tr par : $tr : X \mapsto \sum_{k=1}^{n} X_{kk}$.
   Justifier que X est une forme linéaire de E puis déterminer une base et la dimension de son noyau.
3. L'application $det : M \mapsto det(M)$ est-elle linéaire sur E ?

Exercice $\boxed{11}$ On se donne φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\varphi(x;y;z) = (3x - 2y + z; 2y - z)$.
Identifier $ker(\varphi)$ ainsi $Im(\varphi)$ en précisant les espaces vectoriels de référence dans lesquels ils sont inclus.

Exercice $\boxed{12}$ On considère une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\varphi(2;1) = (1;0;1) \quad ; \quad \varphi(-1;1) = (0;1;1)$$

Démontrer qu'il existe une unique φ ainsi définie et déterminer son noyau et son image.

Exercice $\boxed{13}$ On se donne φ définie sur $\mathbb{R}^2$, une application linéaire dont le noyau est $K = vect(1;-2)$ et l'image $vect(2;1;0)$.
Décrire une telle application φ au moyen de son expression générale, identifier ses espaces de départ et d'arrivée.
Y-a-t-il unicité d'une telle application φ ?

Exercice $\boxed{14}$ On note $(e_1;e_2;e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose ensuite, pour $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$:

$$\varphi(e_1) = e_2 - e_3 \quad ; \quad \varphi(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \quad ; \quad \varphi(e_3) = e_1 - 4e_2 + e_3$$

Expliciter $\varphi(x;y;z)$ de façon générale et déterminer noyau et image de φ. Cette application est-elle un isomorphisme ?

Exercice $\boxed{15}$ On considère les applications u et v définies sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$u(x;y;z;t) = (x;-y;x+z;2t) \quad ; \quad v(x;y;z;t) = (y;x;x-z;t)$$

1. Vérifier que u et v sont des automorphismes.
2. Justifier que $u+v$ et $u-v$ sont des applications linéaires. Sont-ce des automorphismes ?

Exercice $\boxed{16}$ *Une caractérisation à retenir*
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer qu'on a :

$$E = ker(f) \oplus im(f) \quad \Leftrightarrow \quad ker(f) = ker(f^2) \ \wedge \ im(f) = im(f^2)$$

Exercice $\boxed{17}$ *Une étude des hyperplans*
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note φ une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que, si φ est non nulle, le noyau de φ est de dimension $n-1$.
2. Justifier que la matrice de φ dans la base canonique est une matrice ligne.
   On note alors $A = (a_1;\dots;a_n)$ cette matrice ligne.
3. Justifier que le noyau de φ s'écrit $\{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$.
4. Etablir que tout ensemble de la forme $\{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ est le noyau d'une forme linéaire.
5. En déduire que les solutions de tout système linéaire homogène forment un espace vecotiel.

Exercice $\boxed{18}$ *A partir des matrices*
Les matrices suivantes représentent des applications linéaires dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$. Donner les noyau et image respectifs de ces applications (dont on donnera une base et la dimension).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -13 & 24 & -4 \\ 6 & -12 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 *Donner les matrices*

1. Pour chaque application définie, vérifier qu'elle est linéaire puis donner sa matrice relativement aux bases canoniques. On veillera à identifier si besoin les espaces vectoriels de départ et d'arrivée.
   (a) L'application $f : (x; y) \mapsto (2x - y; 3y)$
   (b) L'application $g : (x; y; z; t) \mapsto (z - x; y + 2t; x + y + z - t)$
   (c) L'application $h : (x; y; z) \mapsto (x + y + z; 3z - 2y)$
   (d) L'application $\varphi : P \mapsto P - X^3 P'$ avec $P \in \mathbb{R}_2[X]$
   (e) L'application $M_A : X \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} X$ avec $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   (f) L'application $\Phi : P \mapsto P' - P$ avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$ où n est un entier naturel fixé.
2. Pour chacune des applications précédentes, déterminer l'image et le noyau. On indiquera leurs dimensions respectives.

Exercice 20 On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ admettant pour matrices respectives, relativement aux bases canoniques :

$$Mat_f = A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad Mat_g = B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (u_1; u_2; u_3)$ avec $u_1 = (1; -1; 1)$ et $u_2 = (1; 0; 0)$ et $u_3 = (0; -1; 2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les matrices de f et g relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. Démontrer que $\mathcal{C} = (u_3 - u_1 + 2u_2; u_2 - u_1; u_1)$ avec $v_1 = (1; 0; 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les matrices de f et g relativement à la base $\mathcal{C}$.

Exercice 21 *Un morphisme intégral*

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit φ sur E par :

$$\varphi(P) = \int_0^1 X P'(X) dX$$

1. Démontrer que φ est une forme linéaire de $\mathbb{R}[X]$.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer l'image de $\mathcal{B}$ par φ.
3. Déterminer le noyau $ker(\varphi)$ de φ, puis un supplémentaire de ce noyau.

Exercice 22 On définit l'application Φ sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par $\Phi(f) = f' - f$.

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E. Est-ce un automorphisme ?
2. Déterminer le noyau de Φ (*indication :* c'est un espace de dimension 1 contenant la fonction $\exp$).

Exercice 23 Déterminer les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 24 Déterminer, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$.

Dans le cas où A serait inversible, préciser son inverse.

Exercice $\boxed{25}$ Pour a et b deux réels donnés, on définit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Démontrer que $rg(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et de b a-t-on $rg(A) = 2$?

Exercice $\boxed{26}$ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On définit un endomorphisme f de E tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Justifier que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$. A-t-on f projecteur ?

Exercice $\boxed{27}$ Soit $E = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$. On désigne par $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner une base $\mathcal{E} = (u_1; u_2)$ et la dimension.
2. Vérifier que chaque $F_k = \mathbb{R} \cdot e_k$ est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$ pour $k \in [\![1; 3]\!]$.
3. Décrire les trois projecteurs p_1, p_2 et p_3 tels que $ker(p_k) = E$ et $im(p_k) = F_k$.
4. Ecrire les matrices de chaque p_k relativement à la base canonique puis relativement à $(u_1; u_2; e_k)$ dont on vérifiera préalablement qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice $\boxed{28}$ *Etude de décompositions similaires par projecteurs*

On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et on définit sur E les applications :

$$\Phi : f \mapsto \frac{1}{2}\left(f + f \circ (-id_{\mathbb{R}})\right) \qquad \Psi : f \mapsto \frac{1}{2}\left(f - f \circ (-id_{\mathbb{R}})\right)$$

1. Expliciter les images $\Phi(\exp)$ et $\Psi(\exp)$ que l'on note ch et sh respectivement. En dresser les tableaux de variations.
2. Etablir que Φ et Ψ sont deux projecteurs de E.
3. Déterminer les noyaux et images respectifs de Φ et Ψ.
4. Déterminer les endomorphismes $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.
5. En vous inspirant des résultats qui précèdent, démontrer que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = Sym_n(\mathbb{K}) \oplus Antisym_n(\mathbb{R})$$

Exercice $\boxed{29}$ Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et expliciter les sous-espaces propres associés.

Exercice $\boxed{30}$ On rappelle que la matrice Attila d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est la matrice $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des uns. Retrouver la relation liant H_n^k avec H_n (pour $k \in \mathbb{N}^*$) et en déduire les valeurs propres de H_n. Quel est le rang de H_n ?

Exercice $\boxed{31}$ On définit l'application u sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $u(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ puis déterminer sa matrice relativement à la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice $\boxed{32}$ *(D'après EML 2014 voie E)*

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \; ; \; (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
2. On note $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit f sur F par $f(N) = TNT$. Justifier que $f \in GL(F)$.
3. La famille $\mathcal{B} = (E_{1\,1} \; ; \; E_{1\,2} \; ; \; E_{2\,1} \; ; \; E_{2\,2})$ désigne la base canonique de E.
   Démontrer que la sous-famille $\mathcal{A} = (E_{1\,1} \; ; \; E_{1\,2} \; ; \; E_{2\,2})$ est une base de F.

4. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(f)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{A}$.
5. Etablir que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $S_\lambda = \{M \in F \ ; \ f(M) = \lambda M\}$ est un sous-espace vectoriel de F.
6. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels S_λ est de dimension non nulle.

Exercice $\boxed{33}$ On dit qu'un endomorphisme u sur E est *nilpotent* lorsqu'il vérifie :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad u^n = 0_E$$

1. Démontrer qu'un tel endomorphisme n'est pas inversible et en donner son spectre.
2. Etablir qu'en revanche, $id_E - u$ est inversible. En donner une expression de l'inverse au moyen de u.
3. De façon plus générale, prouvez que si $f \in GL(E)$ commute avec u, alors $f + u$ est inversible.
4. A l'aide d'un contre-exemple simple, démontrer que l'on peut trouver $f + u$ non inversible avec $f \in GL(E)$ si l'hypothèse "f et u commutent" est rompue.

Exercice $\boxed{34}$ *Un cas étrange qui sert de contre-exemple*

On se donne deux applications g et f définies sur $\mathbb{K}[X]$ par :

$$g : P \mapsto XP \qquad\qquad f : P \mapsto \frac{P(X) - P(0)}{X}$$

1. Dans cette question, on assimile un polynôme P avec la fonction polynômiale associée.
   (a) Vérifier que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ la fonction $f(P)$ est prolongeable en $0_{\mathbb{K}}$ par continuité.
   (b) En déduire que le prolongement par continuité de $f(P)$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.
   On pourra à présent considérer que f est à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$ à partir des résultats précédents
2. Démontrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$
3. Justifier que $f \circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ puis déterminer explicitement $(f \circ g)(P)$.
4. Démontrer que $g \circ f$ n'est pas infective.
5. Comparer alors les endomorphismes $g \circ f$ et $f \circ g$.
6. De façon générale, si φ et ψ sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E, la seule connaissance de $\varphi \circ \psi$ suffit-elle à conclure que φ et ψ sont inversibles ? Discuter selon la dimension de E.

Exercice $\boxed{35}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme caractéristique de A puis son polynôme minimal et en déduire A^3, A^5 et A^{-1}.

Exercice $\boxed{36}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et déterminer les espaces propres correspondants.

En déduire l'écriture d'une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Calculer alors A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{37}$ Dans le cas général d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, expliciter le polynôme caractéristique $P_A(X)$.

En déduire une étude du spectre de A et proposer alors une étude de diagonalisabilité de A.

Exercice $\boxed{38}$ On donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Pour chacun des espaces propres, construire une base. On mentionnera la dimension de chaque espace propre.

3. Vérifier que ces espaces sont en somme directe.
4. En déduire l'écriture d'une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Exercice $\boxed{39}$ On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Indiquer pour chacune si elle est, ou non, diagonalisable.

Exercice $\boxed{40}$ *(D'après concours ENS-D2 Paris-Saclay 2016)*
On considère les applications u et v définies par :

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (z_1; z_2; z_3) & \mapsto & (2z_1 - z_3; 3z_1 + z_2 + 2z_3) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} v : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (z_1; z_2) & \mapsto & (z_1 + z_2; -z_2; 2z_1 - z_2) \end{array}$$

1. Vérifier que u est une application linéaire et en donner la matrice H relativement aux bases canoniques.
2. Donner, de même, la matrice K de v relativement aux bases canoniques.
3. Déterminer le noyau de u. L'application u est-elle injective ? Procéder de même avec v.
4. Déterminer l'image de u. L'application u est-elle surjective ? Procéder de même avec v.
5. Calculer le produit HK et établir que $(HK)^2 = \lambda I_2$ où l'on déterminera le réel λ.
6. Démontrer sans calcul que HK est inversible. Quelles en sont les valeurs propres ?
7. Déterminer $(u \circ v)^2$

Exercice $\boxed{41}$ *(D'après oral HEC -voie E)*
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on note D et T les applications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} D : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & ad - bc \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & a + d \end{array}$$

1. Démontrer que T est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Qu'en est-il de D ?
2. Démontrer que $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ \forall B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad D(AB) = D(A)D(B) \ \wedge \ T(AB) = T(BA)$
3. On suppose qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP = B$. Démontrer qu'alors $D(A) = D(B)$ et $T(A) = T(B)$.
4. Déterminer $Ker(T)$. On en donnera une base et la dimension.
5. Quelles sont les valeurs propres de T ?

Exercice $\boxed{42}$ *(D'après oral HEC -voie E)*
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on note $\mathcal{S}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v - v \circ u = 0\}$.

1. Etablir que $\mathcal{S}(u)$ est un espace vectoriel contenant tous les polynômes en u.
2. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1; e_2)$ est une base de E et que u est un endomorphisme de E dont la matrice de représentation dans $\mathcal{B}$ est $M_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Décrire de façon générale les éléments $v \in \mathcal{S}(u)$.

Exercice $\boxed{43}$ *(D'après oral HEC -voie E)*
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de représentation dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $2f - f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$. L'application f est-elle un projecteur ?
2. Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. En donner l'automorphisme réciproque.
3. Démontrer que la seule valeur propre de f est 1. Décrire l'espace propre associé.
4. Démontrer qu'on ne peut trouver de matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. Calculer explicitement A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{44}$ *(D'après HEC -voie S)*

Soit f unendomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de représentation dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de f.
2. Démontrer qu'on ne peut trouver une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. On définit l'élément $Q \in \mathbb{R}[X]$ par $Q(X) = X^3 + X^2$. Justifier que Q est un polynôme annulateur de f.
4. Peut-on trouver un polynôme annulateur de f de degré 2 ?
5. Déterminer deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que les endomorphismes $Q_1(f)$ et $Q_2(f)$ soient des projecteurs vérifiant $Q_1(f) + Q_2(f) = id_{\mathbb{R}^3}$

Exercice $\boxed{45}$ *Base de projecteurs*

On désigne par $(E_{ij})_{i \leq nj \leq n}$ les matrices formant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que, pour tous $i \in [\![1; n]\!]$ et tout $j \neq i$, la matrice $E_{ii} + E_{ij}$ est la matrice de représentation d'un projecteur.
2. Etablir que l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ possède une base composée exclusivement de projecteurs.

Exercice $\boxed{46}$ *(D'après ESSEC voie S -2017)*

Pour q fonction continue sur $[0; 1]$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble $F(q)$ par :

$$F(q) = \{f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R}) \;|\; \forall t \in [0; 1] \quad f''(t) = q(t)f(t)\}$$

1. Démontrer que, pour tout $q \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ on a $F(q)$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$.
2. Pour toute fonction f de $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$, on définit la fonction $\Phi(f)$ définie sur $[0; 1]$ par :

$$\Phi(f) : t \quad \mapsto \quad \int_0^t (t - u)q(u)f(u)du$$

   Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0; 1]; \mathbb{R})$.
3. Démontrer que $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0; 1]$ et déterminer la dérivée ainsi que la dérivée seconde de $\Phi(f)$.
4. En déduire que, pour toute fonction f de $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ on a l'équivalence :

$$\Phi(f) = f \quad \iff \quad (f \in F(q) \;\wedge\; f(0) = f'(0) = 0)$$

5. Pour q arbitrairement fixée, existe-il un endomorphisme Ψ_q de $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ tel que $ker(\Psi_q) = F(q)$?