.

Applications linéaires : corrections

Nous proposons un corrigé des exercices $\boxed{5}$ à $\boxed{9}$ qui ont fait l'objet (du point de vue du format) de khôlles.
Par souci d'efficacité, nous nous autorisons, pour le corrigé à utiliser le théorème du rang, qui sera vu très prochainement, mais qui n'était pas encore connu au moment des khôlles.

Exercice $\boxed{5}$ Soit ainsi $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant $\varphi(x;y;z) = (3x-2y+z; 2y-z)$.

- *Etude de ker(φ).* Notons K ce noyau. On a $K \subset \mathbb{R}^3$ défini par :

$$K : \left\{ \begin{array}{cccc} 3x & -2y & +z & = 0 \\ & 2y & -z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ 2y & = & z \end{array} \right.$$

  Ayant utilisé $L_1 \rightarrow L_1 + L_2$. On peut alors conclure que $K = \{(0; y; 2y)\ ;\ y \in \mathbb{R}\} = vect(0;1;2)$ de dimension 1.
- *Etude de l'image*
  D'après le théorème du rang, l'image de φ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 : c'est donc $\mathbb{R}^2$ lui-même. Remarquons que, par propriété du cours, $im(\varphi)$ est engendrée par les vecteurs $\varphi(1;0;0) = (1;0)$, $\varphi(0;1;0) = (-2;2)$ et $\varphi(0;0;1) = (1;-1)$ forme une famille liée que l'on réduit à $\mathcal{B} = ((1;0);(1;-1))$ libre. Il est alors claire que $im(\varphi) = \mathbb{R}^2$ et l'on peut choisir la base canonique usuelle pour base de l'image. On retrouve le résultat.

Exercice $\boxed{6}$ Comme la famille $((2;1) : (-1;1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, l'existence se déduit par théorème.

- *Etude de l'image* : La famille $((1;0;1);(0;1;1))$ engendre $im(\varphi)$ et est clairement libre donc $im(\varphi) = vect((1;0;1);(0;1;1))$ et est de dimension 2.
- *Etude de ker(φ)* : D'après le théorème du rang, le noyau est de dimension 0 donc $ker(\varphi) = \{(0;0)\}$.

Exercice $\boxed{7}$ (voir énoncé rectifié) On se donne φ vérifiant ainsi $\varphi(1;-2) = (0;0;0)$ et choisissons $\varphi(1;0) = (2;1;0)$.
L'application est alors définie de façon unique *par ces choix* et existe bien, en tant qu'application linéaire comme $((1;-2);(1;0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En particulier, $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Ecrivons $(x;y) = \alpha(1;0) + \beta(1;-2)$. Par inversion de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ on obtient $\alpha = x + \frac{1}{2}y$ et $\beta = \frac{-y}{2}$ d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(x;y) &= \varphi\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)y(1;0) + \frac{-y}{2}(1;-2)\right) = \left(x+\frac{1}{2}\right)y\varphi(1;0) + \frac{-y}{2}\varphi(1;-2) \\ &= \left(x+\frac{1}{2}y\right)(2;1;0) + (0;0;0) = \left(2x+y; x+\frac{1}{2}y; 0\right) \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier la linéarité de cette application. Enfin, remarquons qu'avec ψ définie linéaire en posant $\psi(1;-2) = (0;0;0)$ et $\psi(0;1) = (2;1;0)$ on obtient une seconde application linéaire distincte de φ et possédant également le noyau et l'image attendus.
L'unicité n'est donc pas établie.
Remarque : une démarche complètement similaire à précédamment permettra de trouver $\psi(x;y) = (4x+2y; 2x+y; 0)$

Exercice $\boxed{8}$ L'existence est assurée par un théorème du cours, la famille $(e_1;e_2;e_3)$ étant ma base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On a $\varphi(x;y;z) = \varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x(e_2 - e_3) + y(2e_1 + 3e_2 + e_3) + z(e_1 - 4e_2 + e_3)$ par linéarité et ainsi :

$$\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x;y;z) = (2y+z\ ;\ x+3y-4z\ ;\ -x+y+z)$$

On peut aussi écrire (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$) la matrice $A = Mat(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et calculer :

$$\begin{aligned} det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{(avec } L_3 \leftarrow L_2 + l_3) \\ &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi A est inversible, donc φ également : c'est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donc un isomorphisme (et également un automorphisme)

Exercice $\boxed{9}$ Nous notons U la matrice de u et V, celle de v, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$; ainsi on aura :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice U est triangulaire inférieure avec ses coefficients diagonaux non nuls : elle est donc inversible. Ainsi, u est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^4$ ce qui en fait un automorphisme.
   Le calcul de $det(V)$ peut se faire directement :

$$det(V) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

   Les mêmes conclusions s'appliquent alors à v.
2. L'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ est vectoriel donc stable par $+$ et multiplication par un scalaire : $u + v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ et comme $u - v = u + (-1) \cdot v$ on en déduit la même chose pour $u - v$. On étudie leur caractères bijectifs à l'aide de l'étude de l'inversibilité des matrices $U + V$ et $U - V$:

$$U + V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad U - V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   La matrice $U - V$ est clairement non inversible (ligne L_3 nulle) donc $u - v$ n'est pas un automorphisme.
   Le calcul du déterminant de $U + V$ donne :

$$det(U+V) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \boxed{2} \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times (-2) = 12 \neq 0$$

   Donc $U + V$ est inversible : $u + v$ est un automorphisme.