.

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème I : Ramène la babase !

On considère les matrices A, B et C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note dans ce problème $\mathcal{F} = (A \,;\, B \,;\, C)$ et on pose $\mathbf{F} = vect(A; B; C)$.

1. Déterminer le rang et le noyau de chacune des trois matrices de la famille $\mathcal{F}$.
2. Etablir que la famille $\mathcal{F}$ est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. (a) Déterminer la dimension de $\mathbf{F}$ en justifiant soigneusement.
   (b) Calculer A^2 et justifier que $A^2 \in vect(A)$.
   (c) Etablir que l'on a $\forall n \geq 2 \quad A^n \in vect(A)$
   (d) En déduire que les matrices A^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ sont dans l'espace $\mathbf{F}$.
   (e) A-t-on $C^2 \in \mathbf{F}$?
4. On définit maintenant trois nouvelles matrices par :

$$E_1 = A \quad ; \quad E_2 = A - B - C \quad ; \quad E_3 = 2A - 2B - C$$

   Justifier que $\mathcal{F}' = (E_1 \,;\, E_2 \,;\, E_3)$ est une autre base de $\mathbf{F}$.
5. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{F}$ à la base $\mathcal{F}'$ et en calculer son inverse P^{-1}.
6. Donner une matrice N complétant la base $\mathcal{F}'$ en une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Ce choix est-il unique ?

toute ressemblance avec ens-D2 - Paris Saclay 2023 ne serait que fort suite

Problème II : Dédé joue aux dés des doubles !

Ce problème propose une étude de deux jeux de dés avec des dés équilibrés identiques à d faces distinctes où $d \geq 2$ est un entier naturel.

Partie I : Etude de l'apparition des doubles dés

Dédé est un joueur qui joue aux dés à d faces en lançant deux dés équilibrés à d faces (avec $d \geq 2$ un entier naturel fixé) et qui marque deux points à chaque fois que les deux dés lancés donnent un *double* -c'est-à-dire que les deux dés marquent le même résultat- et un seul point sinon.

1. Calculer la probabilité de l'événement D : "en lançant une fois les deux dés, Dédé obtient un double", en fonction de d.
2. Dédé joue n fois au jeu décrit, avec $n \geq 2$ un autre entier naturel que d. On note alors Δ_n la variable aléatoire réelle qui renvoie le nombre de points obtenus lors de ces n parties.
   (a) En justifiant soigneusement, démontrer que $\Delta_n - n$ suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètre(s).
   (b) Donner alors explicitement la valeur de $\mathbb{P}[\Delta_n = k]$ pour les valeurs k prises par Δ_n.
   (c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[\Delta_n]$ de Δ_n
   (d) Déterminer la variance $\mathbb{V}[\Delta_n]$ de Δ_n ainsi que le moment quadratique $m_2(\Delta_n)$ de Δ_n de façons explicites.
3. Dédé joue maintenant au jeu des doubles jusqu'à obtention de deux points en une seule partie.
   On note T la variable aléatoire représentant le nombre de parties jouées par Dédé dans cette expérience.
   (a) Reconnaître la loi de T. Une justification soigneuse est attendue.
   (b) Décrire explicitement les valeurs de $\mathbb{P}[T = k]$ pour les valeurs k prises par T.
   (c) Donner les valeurs d'espérance et variance de T.
   (d) Pour quelles valeurs de d probabilité que Dédé obtienne un double au bout d'au plus deux parties dépasse $1/2$?

Partie II : Jouer une nouvelle partie

Dédé change de jeu et lance maintenant deux dés équilibrés à d faces numérotées chacune de 1 à d pour lesquels il comparera les scores obtenus sur chacune des deux faces des deux dés.

1. Dédé joue au jeu suivant :
   En désignant par D_1 le résultat (numérique) du premier dé et D_2 le résultat (numérique) du second dé, les points marqués suivent les règles suivantes :
   - Si $P_0 = [D_1 < D_2]$ se produit, alors Dédé ne marque pas de point
   - Si $P_1 = [D_2 < D_1]$ se produit, alors Dédé marque un point.
   - Si $P_2 = [D_1 = D_2]$ se produit, alors Dédé marque deux points..

   Calculer les probabilités respectives des événements P_0, P_1 et P_2.

   Dans la suite, Dédé joue n fois au jeu précédant (avec $n \geq 2$...)
   On définit alors, pour chaque $i \leq n$, les variables aléatoires suivantes :
   - S_i : le nombre de points marqués par Dédé à la partie numéro i
   - Σ_i : le nombre de points totalisés sur les i premières parties.
2. Décrire la loi de S_i pour $i \in \{1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$. On en calculera l'espérance et la variance.
3. Quelle est la loi de la variable Σ_1 ?
4. Quelles sont les valeurs prises par Σ_2 ? Décrire alors sa loi.
5. Décrire Σ_i en fonction de $S_1, S_2, \dots, S_i$.
   En déduire l'espérance de Σ_i puis préciser celle de Σ_n.
6. En moyenne, combien de parties devrait envisager Dédé au minimum pour totaliser au moins $dd = d^2$ points ?

D'après (d'après) ECRICOME 2010 - voie T

Problème III : On met Poly à Laplace de Bessel

Dans ce problème, on note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont la base canonique est la famille $\mathcal{B} = (X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (avec convention $X^0 = \mathbb{1}$).
On rappelle que P est un polynôme à coefficients réels de degré n non nul si, et seulement si, il existe $a = (a_0 \dots a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad ;\text{et } a_n \neq 0$$

On définira alors une application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi : P \mapsto \int_0^{+\infty} P(x)e^{-x}\mathrm{d}x$$

1. Démontrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé, l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \ \in \mathbb{R}_n[X]$ fixé. Etablir que l'on a, pour tout $k \leq n$:

   $$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

   où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de P.
3. Le but de cette question est d'établir que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x}\mathrm{d}x$ converge bien.
   Ce résultat pourra être utilisé dans la suite du problème.
   (a) Déterminer, pour tout polynôme P de degré n, un entier naturel non nul, la valeur de $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^{\frac{x}{2}}}$
   (b) En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$ vérifiant :

   $$\lim_{x\to+\infty} P(x)e^{-x} = \varepsilon(x)e^{-\frac{x}{2}}$$

   (c) En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x}$x̣ converge bien.
4. (a) Déterminer $\varphi(\mathbb{1})$ puis établir à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi(X^k) = k\varphi(X^{k-1})$
   (b) En déduire la valeur de $\varphi(X^k)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Justifier que φ est une forme linéaire.
   (d) En déduire que, pour tout polynôme P de degré n s'écrivant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on a :

   $$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)$$

5. Dans cette question, on pose $n = 3$.
   (a) Déterminer la matrice L_n de l'application φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}$.
   (b) On pose l'équation $L_nU = 0$ d'inconnue U dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   Démonter que l'ensemble $\mathcal{K}$ des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ de dimension 3.
   (c) Justifier que le rang de L_n est 1.

6. De façon générale, démontrer que la famille de polynômes $\mathcal{C} = (Q_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par $Q_k(X) = X^k - k!\mathbb{1}$ vérifie :

$$\varphi\left(vect(\mathcal{C})\right) = \{O\}$$

7. Montrer que le rang de φ est 1.
8. On définit à présent une nouvelle application $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\mathcal{L}(P) : t \mapsto \int_0^{+\infty} P(x)e^{-\frac{1}{t}x}\mathrm{d}x$$

   (a) Démontrer que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$ et exprimer les images des éléments de la famille $\mathcal{B}$ par l'application $\mathcal{L}$.

   (b) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $Q = \mathcal{L}(P)$ est une application polynômiale définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Soit k un entier naturel non nul et $P \in \mathbb{R}_k[X]$ de degré exactement k.
   Déterminer un équivalent lorsque n tend vers l'infini de $\binom{n}{k}\mathcal{L}(P)\left(\frac{1}{n}\right)$

D'après une convolution polynômiale Laplacienne de ens-D2 - Paris Saclay 2023

$\boxed{\text{Problème 4}}$: On demande du poisson

La demande journalière pour un produit -disons, du poisson- est modélisée par une variable aléatoire réelle X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On supposera, de plus, que la demande d'un jour donné ne dépend pas des demandes des autres jours.

1. Comme tous les vendeurs sur les marchés le savent bien, la probabilité de demander treize poissons est la même que celle de demander douze poissons (au marché, on vend facilement treize à la douzaine).
   Déterminer alors la valeur du paramètre λ.
2. En déduire les valeurs de $\mathbb{E}[X]$ et de $\mathbb{V}[X]$.
3. On appelle *queue d'une loi* $\mathcal{L}$ la fonction définie par $Q : t \mapsto \mathbb{P}[X \geq t]$.
   Pour terminer ce problème en queue de Poisson, nous introduisons donc Q_X la queue (de Poisson) de X

   (a) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, si t est compris entre les entier k et $k+1$, alors $Q_X(t) = Q_X(k+1)$

   (b) Etablir que Q est décroissante et vérifie :
$$\lim_{i\to+\infty} Q_X(i) = 0$$

D'après un contexte de ensD2 Paris Saclay 2010