.

Trigonométrie

Exercice 1 Résoudre l'équation $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=1$ d'inconnue réelle x.
Indication : On pourra étudier la fonction définie par $f(x)=\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}$

Exercice 2 **Des limites avec fonctions trigonométriques**
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x+3}{2x+1}\right)$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\ -1}{\sin^2 x}$ **4.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x}{1+x}$

Exercice 3 **Des intégrales avec fonctions trigonométriques**
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(2t)}{\cos t}dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{3}{2}\cos^2(t)-\sin(2t-\pi)dt$ **3.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ **4.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan x}dx$

Exercice 4 **Etude de réciproque**
On considère la fonction φ définie sur $I=\left]-\frac{\pi}{2}\,;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x)=\sin(x)$.

1. Justifier que φ est bijective de I dans $]-1;1[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
2. La fonction réciproque de φ définie sur $]-1;1[$ est notée $\arcsin$. Dresser le tableau des variations de $\arcsin$.
3. A partir de la formule $(\varphi\circ\varphi^{-1})(x)=x$, déterminer une expression de ${}^{\arcsin'(x)}$ pour $x\in]-1;1[$.

Exercice 5 **Développements limités trigonométriques**
Déterminer les développements limités à l'ordre n, en a (notés $DL_n(a)$) demandés :

1. $DL_3(0)$ de $\dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{1+x}$ puis de $\dfrac{x(2+\cos x)-3\sin x}{x^5}$
2. $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\dfrac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi-4x}$

Exercice 6 Calculer les limites suivantes (on pourra s'aider de développements limités) :

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$ (b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{\sin t}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{e^{-\frac{\pi}{2}x^2}-e^{-\frac{\pi}{2}}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(3x)}{1-2\cos x}$ (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2+\cos x)-3\sin x}{x^5}$

Exercice 7 **Avec les espaces vectoriels** On désignera dans cet exercice $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que la famille $(\sin\,;\ \cos)$ est libre dans l'espace E
2. Etudier la liberté de la famille $(\sin\,;\ \cos\,;\ id\cdot\sin\,,\ id\cdot\cos)$ dans E.

Exercice 8 **Avec des applications linéaires** On désignera dans cet exercice $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

1. On pose $F=\text{vect}(\exp\,;\ \sin\,;\ \cos)$. Démontrer que $dim(F)=3$.
2. On définit $D:F\longrightarrow E$ par $D(f)=f'$ pour $f\in F$.
   Etablir que D est un automorphisme de F.
3. Déterminer la matrice représentative de D dans la base $(\exp\,;\ \sin\,;\ \cos)$. On pourra abusivement noter D cette matrice.
4. Exprimer D^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$

Exercice $\boxed{9}$ Nous proposons d'étudier à cette fin la fonction $\varphi(x) = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$ avec $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, après avoir observé la périodicité de période 2π et en notant que sur l'intervalle $[0; 2\pi[$, l'équation proposée n'est définie que sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (d'après les tableaux de signes de $\cos$ et $\sin$).

La fonction φ est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ (lorsqu'aucun radicande ne s'annule). On calcule alors :

$$\varphi'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{1}{2\sqrt{\sin 2x}}\left[\cos^{3/2} x - \sin^{3/2} x\right]$$

L'étude du signe de $\varphi'(x)$ se ramène donc à celui de $\cos^{3/2} x - \sin^{3/2} x$. Or :

$$\cos^{3/2} x - \sin^{3/2} x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^{3/2} x > \sin^{3/2} x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > \sin x (> 0)$$

pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, on obtient que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad \varphi'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} > x$ permettant de dresser un tableau des variations de φ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	1	$\nearrow$	$2^{3/4}$	$\searrow$	1

Exercice $\boxed{1}$ **Des limites avec fonctions trigonométriques**

3. On écrit (au voisinage de 0) :

$$\forall h \neq 0 \quad \frac{\cos h \ -1}{\sin^2 h} = \frac{\cos h \ -1}{1-\cos^2 h} = \frac{\cos h \ -1}{(1-\cos h)(1+\cos h)} = \frac{-1}{1+\cos h}$$

et comme $\lim\limits_{x \to 0} 1 + \cos x = 1 + \cos 0 = 2$ par continuité de $\cos$ sur $\mathbb{R}$ on trouvera finalement :

$$x0 \frac{\cos x \ -1}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{1+\cos x} = -\frac{1}{2}$$

4. On encadre (au voisinage de $+\infty$) : $-1 \leq \sin x \leq 1$ et ainsi :

$$\frac{0}{1+x} = 0 \leq \frac{1+\sin x}{1+x} \leq \frac{1+1}{1+x} = \frac{2}{1+x}$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{1+x} = 0$ donc le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sin x}{1+x} = 0$