Devoir Supplémentaire

Devoir de vacances partie analyse (et un peu de probabilités). Les résultats de ce devoir pourront être connus même si le devoir n'a pas été traité.
Vous pouvez poser vos questions jusqu'au 8 juillet via discord sans attendre de réponse immédiate. Indisponibilité notoire entre le 1 juillet et le 3 juillet de votre professeur (merci par avance).
Vous pourrez rendre votre copie à la rentrée (à condition d'avoir effectué un travail individuel - merci)

Problème : La fonction tangente (tan)

On donne $\tan$, fonction réelle définie par

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

.
On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1° Déterminez le domaine de définition $\mathcal{D}_{\tan}$ de $\tan$.

2° Démontrez que $\tan$ est une fonction impaire et qu'elle vérifie $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan} \quad \tan(x+\pi) = \tan(x)$.
La fonction $\tan$ sera dite ainsi *périodique de période* π.

On pourra limiter alors l'étude de $\tan$ à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ que l'on notera I par la suite.

3° a) Etablir que $\tan$ est dérivable sur I et démontrer que $\forall x \in I \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.
b) Déterminer les asymptotes horizontales et verticales éventuelles de $\tan$.
c) Dressez le tableau de variations de $\tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et construisez la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal (vous indiquerez clairement les unités choisies).

4° a) Calculez $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$ et interprétez ce résultat.
b) Déterminez une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
c) Explicitez les dérivées d'ordre 2 et 3 de $\tan$. Complétez la figure réalisée en 3°c) avec $\mathcal{T}_0$.

5° Etablir que $\tan$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque de $\tan$ est appelée arctangente, notée $\arctan$.

6° Démontrer que $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

7° Dresser le tableau des variations de $\arctan$. Vous calculez les images des réels 0 ; 1 ; $\sqrt{3}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. que vous pourrez résumer dans un tableau.

Important : Le résultat essentiel de ce devoir est celui qui est en lien avec l'intégration :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(x)$$

Application :

1. Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ pour $x \in \mathbb{R}$ définie une densité de probabilité.
2. Soit X une VAR à dentsité f. Etablir que X n'a ni espérance ni variance.

Une variable aléatoire X admettant une telle densité suit la loi dite de Cauchy.