.

Matrices et Probabilités

Devoir de vacances partie algèbre linéaire (et un oeu de probabilités).
Vous pouvez poser vos questions jusqu'au 8 juillet via discord sans attendre de réponse immédiate. Indisponibilité notoire entre le 1 juillet et le 3 juillet de votre professeur (merci par avance).
Vous pourrez rendre votre copie à la rentrée (à condition d'avoir effectué un travail individuel - merci)

Un p'tit coup dans la matrice

Un homme sort d'un bar, tard le soir, après avoir un peu abusé de la patience du patron.
Comme (mystérieusement) il ne voit plus très bien où il met les pieds, il se déplace aléatoirement entre trois lieux : Le Bar (B), sa Maison (M) et le commissariat (C). Chaque fois qu'il est en un lieu autre que le commissariat, il se déplace vers un autre lieu avec équiprobabilité (il ne reste pas sur place). En effet, à chaque passage au commissariat, l'homme est immédiatement reconduit à sa maison (ce qui lui vaut un déplacement).

On notera ainsi, abusivement, lorsque $n \in \mathbb{N}$ désigne le nombre de déplacements effectués par notre individu :

- C_n l'événement " l'individu est au commissariat après n déplacements"
- B_n l'événement " l'individu est au bar après n déplacements"
- M_n l'événement " l'individu se situe à son domicile (sa maison) après n déplacements"

On désigne par $X_n = (\mathbb{P}(B_n) \ ; \ \mathbb{P}(C_n) \ ; \ \mathbb{P}(M_n))$ la représentation en matrice-ligne des probabilités des événements désignés plus haut, en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $(C_n; B_n; M_n)$ constitue un système complet de l'univers étudié.
2. Exprimer $\mathbb{P}[C_{n+1}]$ à l'aide de la formule des probabilités totales appliqué au système complet d'événements $(C_n; B_n; M_n)$ pour $n \geq 1$.
   En déduire des écritures similaires pour $\mathbb{P}[B_{n+1}]$ et $\mathbb{P}[M_{n+1}]$.
3. Décrire une matrice T, dite de transition, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_{n+1} = X_n \cdot T$.
4. Justifier que $X_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$ puis démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = X_0 \cdot T^n$$
5. (a) Déterminer les valeurs propres de T.
   On pour vérifier que $det(T - \lambda \cdot I_3) = -\frac{1}{4}(\lambda - 1)(2\lambda + 1)^2$.

   (b) Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres de T. On en donner, pour chacun, une base et la dimension.

   (c) On considère $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -7 & -6 & 13 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   (d) On pose $D = P^{-1}TP$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme de newton, calculer A^n.
   Vérifier alors que pour tout entier naturel n on a :
$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^n & n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

4° Démontrer que $T = PD^nP^{-1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

5° Calculer T^n puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n$.

6° Quelle est la limite de (X_n) ? Interpréter dans le contexte.