.

Analyse dans $\mathbb{R}^n$

Topologie de Base

Exercice $\boxed{1}$ On donne $I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \dfrac{1}{2x} \leq 2\right\}$.

1. L'ensemble I est-il un intervalle ?
2. Dire si I est ouvert, fermé, ou ni l'un ni l'autre.
3. Même questions avec $D = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x - y < 3\right\}$

Exercice $\boxed{2}$ Les ensembles suivants sont-ils ouverts, fermés, bornés dans $\mathbb{R}$?

$a)\quad A = [0; 3[\quad b)\quad B = \{0\} \cup]1; 2] \quad c)\quad C = \left]-1; \frac{1}{6}\right[\cap \left[0; \frac{1}{3}\right] \quad d)\quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} \quad e)\quad U = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-5| \leq 3$

Exercice $\boxed{3}$ Les ensembles suivants sont-ils ouverts, fermés, bornés dans $\mathbb{R}^2$?

$a)\quad A =]1; 2] \times [-1; 0] \quad b)\quad B = [-1; 2] \times \mathbb{R}_+ \quad c)\quad C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 7y < 1 \ \wedge \ 2y - 1 > x\} \quad d)\quad D = \{(x; y) \in \mathbb{}$

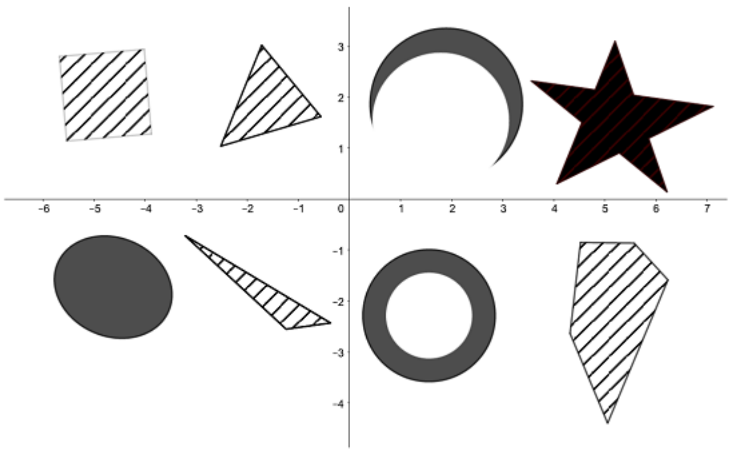
Exercice $\boxed{4}$ Représenter graphiquement puis indiquer si les ensembles suivants sont ouverts :

$a)\quad A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 + 4y < 5\} \qquad b)\quad B = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 1| < 1\right\}$
$c)\quad C = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \ \wedge \ |y| \leq 1\right\} \qquad d)\quad D = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^x\right\}$

Exercice $\boxed{5}$ **Convexité géométrique**

On se place dans le plan usuel assimilé à $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé (direct).

1. Sans justifier, et visuellement, indiquez pour chaque figure si elle convexe ou non :



2. Pour une fonction f donnée, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative vue comme l'ensemble :

$$\mathcal{C}_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f \ \wedge \ y = f(x)\}$$

où $\mathcal{D}_f$ désigne le domaine de définition de f.
La région du plan située *au-dessus* de $\mathcal{C}_f$ sera notée $\mathcal{S}_f$ et définie par :

$$\mathcal{S}_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f \ \wedge \ y \geq f(x)\}$$

Indiquer, chacune des fonctions suivantes, à partir de considérations géométriques, si S_f est convexe :

$$a) \quad f(x) = x^2 \quad b) \quad f(x) = x^3 \quad c) \quad f(x) = e^x \quad d) \quad f(x) = 2x - 5 \quad e) \quad f(x) = \sqrt{|x|}$$

Exercice $\boxed{6}$ On considère la fonction $\varphi : (x;t) \mapsto (x+2t)e^{t-x}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
On notera, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, $f_t : x \mapsto \ \varphi(x;t)$ et, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $g_x : t \mapsto \varphi(x;t)$

1. Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction f_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_t'(x)$, que l'on pourra aussi désigner par $\dfrac{\partial \varphi(x;t)}{\partial x}$
2. Etudier, en fonction de $t \in \mathbb{R}$, la convexité de f_t sur $\mathbb{R}$.
3. Procéder à une étude similaire de g_x en fonction de $x \in \mathbb{R}$.
4. Démontrer que $\dfrac{\partial f_t'(x)}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial g_x'(t)}{\partial x}$ coïncident.
   Les notations $\dfrac{\partial^2 \varphi(x;t)}{\partial x \partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 \varphi(x;t)}{\partial t \partial x}$ pourront alors être (indifféremment) employées pour désigner ces expressions.

Exercice $\boxed{7}$ **Comparaison pour la factorielle**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on se donne une famille $(x_1; \dots x_n)$ de n réels positifs strictement.

1. En utilisant la fonction $\ln$, démontrer que : $(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$
2. Etablir que : $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} \geq \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$
3. Conclure enfin que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Exercice $\boxed{8}$ **Topologie dans $\mathbb{R}^n$** On donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Pour chacun des ensembles suivants, indiquer la nature topologique (ouvert, fermé, compact, convexe) :

$$a) \quad A = \left\{ (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k \geq 1 \right\} \qquad b) \quad B = \left\{ (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} k{x^2}_k = n \right\}$$

$$c) \quad C = \left\{ (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} (x_k - k)^2 < 1 \right\} \quad d) \quad D = \left\{ (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k x_k = 0 \right\}$$

Dérivées partielles

Exercice $\boxed{9}$ On considère les expressions des fonctions à deux variables réelles ci-dessous :

$$a) \quad f(x;y) = \frac{x^2 y}{x+y} \quad b) \quad g(x;y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} \quad c) \quad h(x;y) = \frac{x^4 y}{x^2 - y^2} \quad d) \quad \varphi(x;y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

1. Pour chacune des fonctions fournies, décrire le domaine de définition $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et indiquez s'il s'agit d'un ouvert, d'un fermé.
2. Calculez les dérivées partielles d'ordre 1 de chacune de ces fonctions puis exprimer leur gradient.

Exercice $\boxed{10}$ Pour chacune des fonctions f proposées, on pose $f(0;0) = 0$ et on fournit une expression pour $(x;y) \neq (0;0)$:

$$a) \quad f(x;y) = \frac{x-2y}{x^2-y} \quad b) \quad f(x;y) = \frac{x^2+y}{x+y} \quad c) \quad f(x;y) = \frac{(\sin x)(\sin y)}{2xy}$$

1. Dans chaque cas, exprimer le gradient $\nabla f(x;y)$
2. Décrire la matrice Hessienne de chacune de ces fonctions.

Exercice $\boxed{11}$ **Calculs de dérivées partielles**

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes :

1. p définie sur $\mathbb{R}^2$ par $p(x;y) = 3x^2y^3 - 5x^2y + 6xy^2 + y^2$
2. f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x;y) = \dfrac{3xy}{x^2+y^2+2}$
3. g définie sur $\mathbb{R}^3$ par $g(x;y;z) = xze^{2-yx+z^2} - 3y$

Exercice $\boxed{12}$ On définit une fonction f sur une partie Ω de $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : (x;y;z) \mapsto \frac{x+y+z}{x-y+z}$$

1. Déterminer le plus grand domaine Ω possible et indiquer sa nature topologique.
2. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en précisant les domaines de validité respectifs.
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ainsi que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^{\,2}}$

Exercice $\boxed{13}$ **avec trigo** On définit sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions s_1, s_2 et s_3 par :

$$s_1(x;y) = \sin x \quad ; \quad s_2(x;y) = \sin(x+y) \quad ; \quad s_3(x;y) = \sin x + \sin y$$

1. Démontrer que ces trois fonctions sont définies, continues sur $\mathbb{R}^2$ et admettent des dérivées partielles d'ordre 1.
2. Déterminer alors, pour $i \leq 3$ les dérivées partielles d'ordre 2 : $\dfrac{\partial^2 s_i}{\partial x \partial y}$
3. Déterminer enfin les expressions de $\dfrac{\partial^2 s_i}{\partial x^{\,2}}$ et $\dfrac{\partial^2 s_i}{\partial y^{\,2}}$

Exercice $\boxed{14}$ **D'après Concours EnsD2-2009**

avant-propos : *Les questions de cet exercice ne sont plus explicitement au programme mais restons sur nos gardes*

On considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$H : (x;y) \mapsto \begin{cases} \frac{e^{x-y}-1}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

1. Démontrer que H est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. Déterminer, après avoir justifié leur existence, les dérivées partielles : $\dfrac{\partial H}{\partial x}(1;0) \quad ; \quad \dfrac{\partial H}{\partial y}(1;0)$

3. Déterminer, après avoir justifié leur existence, les dérivées partielles : $\dfrac{\partial H}{\partial x}(0;0) \quad ; \quad \dfrac{\partial H}{\partial y}(0;0)$

Exercice $\boxed{15}$ Déterminer, dans chaque cas, le développement limité au second ordre des fonctions suivantes au voisinage du point A :

1. $xy + e^y$ au voisinsage de $A = (0;0)$
2. $xyz + xy + yz + zx$ au voisinage de $A = (1;0;1)$
3. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$ au voisinage de $A = (1;1;1)$
4. **trigo** $(\cos y)e^{x^2-1}$ au voisinage de $A = (1;0)$

Exercice $\boxed{16}$ On donne la fonction f définie par :

$$f(x;y) = x\ln(1+y)\ + ye^x$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. Quelle est sa nature topologique (ouvert, fermé, borné) ?
2. Déterminer la matrice Hessienne de f.
3. Déterminer la *signature* de la matrice Hessienne en le point $(0;0)$

Exercice $\boxed{17}$ On considère l'application de $]-1;1[^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t(x+y) = \dfrac{x+y}{1+xy}$

1. Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial t}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial t}{\partial y}$
2. Démontrer que $t\left(]-1;1[^2\right) =]-1;1[$
3. La fonction t admet-elle des points critiques ? Justifier.

Exercice $\boxed{18}$ Soit f la fonction définie par $f(x;y) = 2x^4 - 5xy + 4y^2$
Déterminer les points critiques de f puis exprimer la matrice Hessienne de f. Déterminer si f est convexe (ou concave) sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice $\boxed{19}$ On définit la densité normale de dimension 2 par :

$$f(x;y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2+y^2)/2}$$

1. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
2. Rechercher les points critiques éventuels de f.
3. Déterminer la matrice Hessienne de f.
4. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$? Concave ?

Exercice $\boxed{20}$ On définit sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ une fonction f par :

$$f(x;y) = (1+x)(1+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

1. Vérifier que f admet des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$
2. Déterminer la matrice Hessienne de f.
3. La fonction f est-elle convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$? Concave ?