.

Vocabulaire de la topologie usuelle

Nous proposons dans cette fiche une synthèse des termes de topologie (usuelle) utilisés, ainsi que des concepts initiant aux études de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (on prendra $n \in \mathbb{N}^*$).

Attention! Seuls quelques éléments de topologie restent actuellement au programme du concours D2. Nous proposons ici un supplément correspondant à l'ancien programme. Il peut apporter une meilleure compréhension.

Quelques Généralités

Dans cette section, E désigne un ensemble non vide. Il est essentiel de connaître ces définitions dans le cas $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

∇ **Distance :** Application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\begin{array}{rll} i) & \forall x \in E\, \forall y \in E \quad d(x;y) = 0 \iff x = y & \text{(Axiome de Séparation)} \\ ii) & \forall x \in E\, \forall y \in E \quad d(x;y) = d(y;x) & \text{(Axiome de Symétrie)} \\ iii) & \forall x \in E\, \forall y \in E\, \forall z \in E \quad d(x;z) \leq d(x;y) + d(y;z) & \text{(Inégalité Triangulaire)} \end{array}$$

Remarque : La définition impose que $d(x;y) \geq 0$ pour tous $(x;y) \in E^2$

∇ **Espace Métrique :** Tout ensemble E muni d'une distance d associée. On le note $(E;d)$.

Métrique de $\mathbb{R}^n$

Dans cette section, on considère que $E = \mathbb{R}^n$ et on note d une distance associée de sorte que l'espace métrique considéré (implicitement ou non) soit $(\mathbb{R}^n \,;\, d)$.

☐ **Boule Ouverte :** Etant donné un centre $a \in E$ et un rayon $r \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble défini comme :

$$B(a;r) = \{x \in E \mid d(x;a) < r\}$$

☐ **Boule Fermée :** Etant donné un centre $a \in E$ et un rayon $r \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble défini comme :

$$B_F(a;r) = \{x \in E \mid d(x;a) \leq r\}$$

☐ **Ensemble Ouvert :** Tout ensemble $\mathcal{O} \subset E$ étant l'union (quelconque) de boules ouvertes.

☐ **Ensemble Fermé :** Tout ensemble $F \subset E$ étant complémentaire d'un ensemble ouvert.

∇ **Intérieur :** L'intérieur $int(A)$ d'une partie A de E est défini comme : *"Le plus grand ouvert inclus dans A"*
On peut le décrire formellement comme :

$$int(A) = \bigcup_{\substack{\mathcal{O}:\text{ ouvert} \\ \mathcal{O} \subset A}} \mathcal{O}$$

∇ **Adhérence :** L'adhérence (ou fermeture) $\overline{A}$ d'une partie A de E est définie comme : *"Le plus petit fermé contenant A"*
On peut le décrire formellement comme :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F:\text{ fermé} \\ A \subset F}} F$$

∇ **Frontière :** La frontière $Fr(A)$ ou encore ∂A d'une partie A de E est définie comme $Fr(A) = \overline{A} \backslash int(A)$

Convexité dans $\mathbb{R}^n$

On considère $E = \mathbb{R}^n$ en tant qu'espace vectoriel dans cette section, avec $n \in \mathbb{N}^*$

☐ **Segment :** Si x et y sont deux éléments de E alors le segment de bornes x et y respectivement est défini comme :

$$[x;y] = \{\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \ ; \ \lambda \in [0;1]\}$$

Remarque : Si x et y sont réels avec $x \leq y$, on retrouve l'intervalle fermé, borné de $\mathbb{R}$. Attention ! L'absence d'ordre naturel total sur $E = \mathbb{R}^n$ compatible avec la structure d'espace vectoriel rend caduque l'hypothèse $x \leq y$ en toute généralité et ainsi, la définition ci-dessus de $[x;y]$ coïncide avec celle de $[y;x]$

☐ **Partie Convexe :** Une partie C de E est dite convexe lorsqu'elle vérifie :

$$\forall x \in C \ \forall y \in C \quad [x;y] \subset C$$

∇ **Cône Vectoriel :** Défini comme partie C *stable* par multiplication scalaire dans $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \ x \in C \implies \lambda \cdot x \in C$$

Remarque : Etend la notion *géométrique* de cône (définissable par sommet et base) mais permet une exploitation formelle et algébrique puissante.

∇ **Cône Vectoriel Positif :** Défini comme partie C *stable* par multiplication par scalaire positif dans $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \ \ x \in C \implies \lambda \cdot x \in C$$

Remarque : On peut envisager de définir les notions de *Cône Vectoriel Strictement Positif*, *Cône Vectoriel Négatif*, *Cône Vectoriel Strictement Négatif*.

∇ **Cône Convexe :** Partie qui est un cône vectoriel et une partie convexe à la fois dans $E = \mathbb{R}^n$.
On peut décliner en *cône convexe (strictement) positif*

∇ **Enveloppe Convexe :** L'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(A)$ ou encore $\mathrm{Hull}(A)$ d'une partie A de E est définie comme : " la plus petite partie convexe de E contenant A".

$$\mathrm{Conv}(A) = \bigcap_{\substack{C:\,\text{convexe} \\ A \subset C}} C$$

∇ Fonctions de type $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ avec n et k deux entiers naturels non nuls, peut être vue comme :

$$f : (x_1 \ ; \ \ldots \ ; \ x_n) \mapsto (y_1 \ ; \ \ldots \ ; \ y_k)$$

et on peut définir ses *fonctions partielles* notées f_i comme applications de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f_i : (x_1 \ ; \ \ldots \ ; \ x_n) \mapsto y_i = f_i(x_1 \ ; \ \ldots \ ; \ x_n)$$

où $1 \leq i \leq k$.
Souvent, on étudie une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ sur un ouvert $\mathcal{D}$ sur lequel f est bien définie. Les fonctions partielles associées peuvent alors aussi être définies sur $\mathcal{D}$.

Fonctions de type $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Les applications partielles f_i de $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ (avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$) et leurs propriétés permettent de ramener l'étude d'une telle fonction f à celles-ci.
Pour φ définie sur un ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut définir ses *applications partielles* φ_i en le point $A = (a_1 \ ; \ \ldots \ ; \ a_n)$ comme étant les fonctions :

$$\varphi_{A;i} : x_i \mapsto \varphi(a_1 \ ; \ \ldots \ ; \ a_{i-1} \ ; \ x_i \ ; \ a_{i+1} \ ; \ \ldots \ ; \ a_n)$$

Remarques : Le terme *Application Partielle* peut donc renvoyer, contextuellement, à des objets différents. Certains énoncés de théorèmes lus dans divers ouvrages peuvent alors apparaître contradictoires : ils relèvent de l'usage d'une même expression (*application partielle*) pour des objets différents (et ont donc des propriétés différentes).
Voir le document *extrait livre* pour un exemple.