.

Espaces métriques

Exercice $\boxed{7}$ Comparaison pour la factorielle

1. La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc on peut exploiter l'inégalité de concavité généralisée, vérifiée pour toute familles $(x_1 \dots x_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ et $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ avec $\displaystyle\sum_{k \leq n} \lambda_k = 1$:
$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln(x_k)$$
ce qui donne, avec $\lambda_k = \dfrac{1}{n}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_k)$$
encore réécrit :
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)}{n} \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right)$$
et, par propriété algébrique de $\ln$:
$$\ln\left((x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}\right) \leq \ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$$
Le résultat attendu étant obtenu par passage à l'exponentielle des deux membres ($\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$).
2. De 1. écrit avec $a_1 \dots a_n$ au lieu de $x_1 \dots x_n$ et en passant à l'inverse, on trouve (sous conditions analogues) :
$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$
En posant $x_k = \frac{1}{a_k}$ ayant $a_k \neq 0$ on obtient :
$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \geq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$
3. On reprend l'inégalité de 1. et on considère $x_k = k \leq n$ de sorte que $(n!)\frac{1}{n} \leq \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right)$ d'où l'on tire, en passant les deux membres à la puissance n (l'application $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) :
$$n! \leq \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{n(n+1)}{2n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$