

**Durée :** quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

## Problème I : Des matrices un peu complexes

On pose  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On définit une matrice *complexe* de  $E$  comme toute matrice  $A \in E$  vérifiant :

$$\exists(x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

On notera  $\mathbb{C}$  l'ensemble des matrices *complexes* de  $E$ .

### Partie A : étude de base de $\mathbb{C}$

- Justifier que les matrices nulle (notée  $O$ ) et identité (notée  $I_2$ ) de  $E$  sont *complexes*.
- Etablir que  $\mathbb{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- On note  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Justifier que  $J$  est dans  $\mathbb{C}$  et vérifie  $J^2 = -I_2$ .
- Déterminer l'ensemble des matrices  $Z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $Z^2 = -I_2$ .
- Démontrer que  $(I_2 ; J)$  est une base de  $\mathbb{C}$  et en déduire la dimension de  $\mathbb{C}$ .
- Soient  $Z$  et  $W$  deux matrices de  $\mathbb{C}$ . Etablir que  $ZW$ , leur produit, est dans  $\mathbb{C}$ .
- Justifier que toute matrice  $Z \in \mathbb{C}$  non nulle est inversible et que son inverse  $Z^{-1}$  est *complexe*.
- Démontrer que l'on a :

$$\forall Z \in \mathbb{C} \quad \forall W \in \mathbb{C} \quad ZW = WZ$$

### Partie B : étude de transformations sur $\mathbb{C}$

On considère les applications  $r : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $i : E \rightarrow \mathbb{R}$  définies de la façon suivante :

- Si  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  alors  $r(M) = \frac{x+t}{2}$
- Si  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  alors  $i(M) = 3y + 2z$

- Etablir que  $r$  et  $i$  sont des formes linéaires de  $E$ .
- Déterminer le noyau  $\ker(r)$  noté  $R$  de l'application  $r$ . Quelle est sa dimension ? Justifier ensuite que  $R \cap \mathbb{C} = \text{vect}(J)$ .
- Déterminer le noyau  $\ker(i)$  noté  $K$  de l'application  $i$ . Quelle est sa dimension ? Justifier ensuite que  $K \cap \mathbb{C} = \text{vect}(I_2)$ .

4. Démontrer que l'on a :

$$\forall Z \in \mathbb{C} \quad Z = r(Z) \cdot I_2 + i(Z) \cdot J$$

Les valeurs  $r(Z)$  et  $i(Z)$  sont appelées respectivement partie réelle et partie imaginaire du complexe  $Z$

5. Etablir que, pour toute matrice  $Z$  de  $\mathbb{C}$ , on a  $\det(Z) = r(Z)^2 + i(Z)^2$ .

6. Déterminer le spectre de  $Z \in \mathbb{C}$  en fonction de  $x = r(Z)$  et  $y = i(Z)$ .

A quelle condition sur  $x$  et  $y$  la matrice  $Z$  est-elle alors diagonalisable ?

7. On rappelle que la *transposée* d'une matrice  $M \in E$ , notée  ${}^tM$ , est l'unique matrice de  $E$  vérifiant :

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \implies {}^tM = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

On désignera par  $\tau$  l'application définie sur  $E$  par  $\tau(M) = {}^tM$ .

(a) Démontrer que  $\tau$  est un automorphisme de  $E$ .

(b) On note  $\mathcal{B} = (E_{11}; E_{12}; E_{21}; E_{22})$  la base canonique de  $E$ .

Donner la matrice de  $\tau$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

(c) Etablir que 1 est valeur propre de  $\tau$  est déterminer l'espace propre associé que l'on notera  $H$ .

L'application  $\tau$  est-elle diagonalisable ? Justifier.

(d) Justifier que  $\tau(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ .

(e) Etablir enfin que, pour toute matrice  $Z \in \mathbb{C}$  on a :

$$\frac{1}{2}(Z + \tau(Z)) = r(Z) \cdot I_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(Z - \tau(Z)) = i(Z) \cdot J$$

## Partie C : Etude des rotations

Cette partie du concours blanc porte sur la trigonométrie. Vous pouvez décider de l'ignorer et de vous reporter sur les autres problèmes. Le barème ne considère donc pas cette partie comme nécessaire pour obtenir une note maximale.

Pour  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé, on définit une matrice notée  $T(\theta)$  par :

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on a  $T(\theta) \in \mathbb{C}$  et que  $\det(T(\theta)) = 1$

2. Etablir que, pour tout  $(\theta; \delta) \in \mathbb{R}^2$  on a  $T(\theta)T(\delta) = T(\theta + \delta)$

3. Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on a  $T(\theta)^n = T(n\theta)$

4. Justifier que toute matrice  $T(\theta)$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$  est inversible avec  $T(\theta)^{-1} = T(-\theta)$ .

5. Les applications  $r$  et  $i$  étant celles définies en partie B, on observe que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad r(T(\theta)) = \cos(\theta) \quad ; \quad i(T(\theta)) = \sin(\theta)$$

(a) Soient  $\theta$  et  $\rho$  deux réels donnés. On pose  $p = \frac{\theta + \rho}{2}$  et  $q = \frac{\theta - \rho}{2}$ .

Démontrer que l'on a  $i(T(\theta)) + i(T(\rho)) = 2i(T(p))r(T(q))$  ainsi que  $i(T(\theta)) - i(T(\rho)) = 2r(T(p))i(T(q))$

(b) Soient  $\theta$  et  $\rho$  deux réels donnés. On pose  $p = \frac{\theta + \rho}{2}$  et  $q = \frac{\theta - \rho}{2}$ .

Démontrer que l'on a  $r(T(\theta)) + r(T(\rho)) = 2r(T(p))r(T(q))$  ainsi que  $r(T(\theta)) - r(T(\rho)) = -2i(T(p))i(T(q))$

## Problème II : Quand votre anniversaire devient un problème

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  un entier naturel donné. On considère une urne  $\mathcal{U}$  contenant exactement  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$  et indiscernables au toucher.

**Partie A : un tirage unique**

On procède à un tirage au hasard d'une boule depuis l'urne  $\mathcal{U}$  et on note  $X$  la variable aléatoire réelle renvoyant le numéro obtenu.

1. Reconnaître la loi de  $X$ .
2. Rappeler les valeurs d'espérance  $\mathbb{E}[X]$  et de variance  $\mathbb{V}[X]$  en fonction de  $N$ .
3. Déterminer une expression de  $m_2(X)$ , le moment quadratique de  $X$ , en fonction de  $N$ .
4. Soit  $k \leq N$  non nul donné. A quelle condition a-t-on que  $\mathbb{P}[X = k] \geq \frac{1}{2}$  ?

**Partie B : un paradoxe de collisions connu**

Dans cette partie,  $N \geq 3$ . On procède ici à  $p \geq 2$  tirages successifs avec remise. On pourra noter  $L = (n_1 ; n_2 ; \dots ; n_p)$  la liste des résultats obtenus où  $n_i$  désignerait le numéro obtenu au tirage  $i$ .

1. Exprimer le nombre total de listes de tirages possibles en fonction de  $N$  et de  $p$ .
2. Combien de listes de tirages dénombre-t-on dans lesquels tous les numéros obtenus sont distincts ?  
On distinguera les cas  $p \leq N$  et  $p > N$ .
3. En déduire une expression, en fonction de  $N$  et de  $p$  du nombre de tirages possibles vérifiant la condition :

$$(\mathcal{C}) : \exists i \leq p \exists j \leq p \ i \neq j \wedge n_i = n_j$$

La condition  $(\mathcal{C})$  sera nommée *collision*. La notation  $\mathcal{C}$  pourra alors désigner la réalisation (en tant qu'événement) de cette condition lors d'une expérience aléatoire.

Dans la suite, on parlera de *nombre de collisions* pour désigner le nombre de couples  $(i; j)$  avec  $i < j$  vérifiant  $n_i = n_j$  obtenus lors d'un tirage  $L$ . On dira qu'un tirage  $L$  est *sans collision* lorsque le nombre de collision est 0.

4. Démontrer que, lors de  $p$  tirages successifs au hasard avec remises depuis l'urne  $\mathcal{U}$ , la probabilité d'obtenir au moins une collision vaut 1 dès que  $p > N$ .
5. Dans cette question,  $N = 5$  et  $p = 3$ .
  - (a) Déterminer la probabilité d'obtention d'(au moins) une collision lorsque l'on procède à  $p = 3$  tirages au hasard successifs, avec remise, dans l'urne  $\mathcal{U}$  et comparer cette valeur à  $\frac{1}{2}$ .
  - (b) Soit  $X$  le nombre (aléatoire) de collisions obtenues durant la réalisation d'un tel protocole.  
Déterminer la loi de  $X$  (on pourra résumer sous la forme d'un tableau de loi)
  - (c) En déduire la valeur  $\mathbb{E}[X]$  d'espérance de  $X$ .
6. On se place à présent dans le cas plus général  $2 \leq p \leq N$ .
  - (a) Déterminer la probabilité d'obtenir un tirage *sans collision* en fonction de  $p$  et de  $N$  lors du tirage au hasard de  $p$  boules successivement avec remise depuis cette urne.
  - (b) Justifier que, sous les hypothèses données, la probabilité d'obtention d'une collision ne vaut jamais 1.
  - (c) Déterminer le nombre maximal de collisions ainsi que la probabilité de le réaliser (en fonction de  $p$  et de  $N$ ).
7. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a < n$  un entier naturel non nul, on note  $\eta(a; n)$  la quantité définie par :

$$\eta(a; n) = - \sum_{k=0}^{a-1} \ln \left( 1 - \frac{k}{n} \right)$$

- (a) Démontrer que  $\ln(\mathbb{P}(\overline{\mathcal{C}})) = -\eta(p; N)$  sous condition  $2 \leq p \leq N$ .
- (b) Justifier que, si  $k = o(N)$  alors  $\ln \left( 1 - \frac{k}{N} \right) = \frac{-k^2 - 2kN}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$  pour  $N \rightarrow +\infty$ .
- (c) Vérifier que l'on a, pour tout  $p \leq N$  :

$$\sum_{k=0}^{p-1} (k^2 - 2kN) = \frac{p(p-1)}{3} \left( p - \frac{6N+1}{2} \right)$$

(d) En déduire que, si  $p = o(N)$  alors on a :

$$\eta(p; N) \sim \frac{p(p-1)}{6N^2} \left( \frac{6N+1}{2} - p \right) \quad (N \rightarrow +\infty)$$

La valeur de  $\eta(p; N)$  est appelée entropie de collision.

8. Une application numérique connue :

Pour  $N = 365$  et  $p = 23$ , l'entropie de collision vaut approximativement  $\ln(2)$ . Proposer une interprétation dans un contexte de tous les jours (le jeu de mots a valeur d'indication)

### Problème III : Optimimisez !

Soit la fonction à valeurs réelles définie par  $f(x; y) = x^2 + y^2 - 4y - 10x + 29$  pour  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ .

#### Partie A : étude générale

1. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction  $f$
3. Démontrer que  $f$  admet un unique point critique  $M = (x_0; y_0)$  que l'on déterminera.
4. Démontrer que  $f$  réalise un minimum local en  $M$ .
5. La fonction  $f$  est-elle convexe ? Justifier
6. Etablir que  $f$  réalise un minimum global en  $M$

#### Partie B : Sur un domaine particulier

On considère  $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - y^2 - 16 = 0\}$  et on note  $h$  la fonction définie pour tout  $(x; y)$  de  $D$  par :  $h(x; y) = f(x; y)$

1. Justifier que  $D$  est un fermé non borné de  $\mathbb{R}^2$ . Le point  $(2; 5)$  est-il dans  $D$  ?
2. On définit la fonction  $t$  d'une variable réelle par  $t(x) = 2\sqrt{x^2 - 4}$ .
  - (a) Etablir que le domaine de définition de  $t$  est  $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$ .
  - (b) Justifier que  $t$  est paire.
  - (c) Dresser le tableau complet des variations de  $t$  sur  $[2; +\infty[$ .
  - (d) Proposer une représentation graphique de  $t$  dans un repère orthogonal.
  - (e) Compléter votre graphique pour figurer le domaine  $D$ . Est-il convexe ? (on ne demande pas de justification formelle)
3. Justifier que  $(x; y) \in D \iff |y| = t(x)$  et  $|x| \geq 2$  pour  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ .

On pourra dès lors remarquer qu'optimiser  $f$  sur  $D$  revient à étudier la fonction  $x \mapsto f(x; t(x))$  à une variable réelle

### Problème IV : Weibull donne des l...

Pour  $a > 0$  et  $l > 0$  donnés, on considère la fonction  $W_{a,l}$  nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$  et vérifiant  $W_{a,l}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t^a}{l}}\right)$  pour  $t \geq 0$ .

1. Vérifier que, pour tout  $a > 0$  et tout  $l > 0$ , la fonction  $W_{a,l}$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et déterminer ses limites.
2. On admet que  $W_{a,l}$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $T$  réelle.  
Démontrer que  $T$  est à densité puis en déterminer une densité notée  $w$ .
3. On suppose ici que  $a = 1$ 
  - (a) Justifier que  $T$  admet alors une espérance et une variance puis les déterminer (en fonction de  $l$ ).
  - (b) Démontrer que  $\mathbb{P}[T \geq \mathbb{E}[T]]$  est une valeur indépendante de  $l$ .
  - (c) Etablir que  $T$  satisfait la propriété suivante :

$$\forall h > 0 \quad \forall t > 0 \quad \mathbb{P}_{[T>h]}[T > t + h] = \mathbb{P}[T > t]$$

4. Retour au cas général : Démontrer que, pour tout  $a > 0$  et tout  $l > 0$ , la variable aléatoire  $T$  admet une espérance (on ne demande pas sa valeur).