Les exercices proposés ici sont des exercices ayant été donnés à des oraux de concours de diverses filières économiques.
Ils sont conçus pour vérifier, dans un premier temps, les acquisitions de base des notions vues durant le cycle préparatoire en mathémtiques. Il est donc important de savoir les traiter sans aide du cours.

Algèbre

Exercice $\boxed{1}$ énoncé :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie la relation $A^3 + 2A = O$, avec O la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Si le réel λ désigne une valeur propre de la matrice A, quelle(s) valeur(s) possible(s) peut prendre λ ?
2. En suposant, de plus que A est diagonalisable, que peut-on alors en conclure sur les coefficients de A ?

Exercice $\boxed{2}$ énoncé :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 2A^2 + 4A - 3I_3 = O_3$ où O_3 et I_3 désignent respectivement les matrices nulles et identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est inversible.
2. Quelles pourraient être les valeurs propres réelles potentielles de la matrice A ?

Exercice $\boxed{3}$ énoncé :

1. Rappeler la formule du binôme de Newton appliquée à deux matrices A et B en précisant les conditions d'application.
2. Déterminer, selon $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de A^n avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice $\boxed{4}$ énoncé :

Répondre à chacune des deux questions suivantes en justifiant soigneusement votre réponse :

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice $\boxed{5}$ énoncé :

L'entier n étant fixé, on rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus n.
On se donne φ, définie sur $\mathbb{R}_2[X]$, par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad \varphi(P) = (X-1)P' + P$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? Diagonalisable ?

Exercice $\boxed{6}$ **énoncé :**

1. Rappeler la définition d'une matrice inversible.
2. Si A est une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$, un entier naturel, que peut-on dire de l'inversibilité de A lorsqu'elle vérifie :
$$A^4 + 5A^3 = 2A - 3I_n$$
3. Justifier que, si A est une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ un entier naturel telle que, pour un certain entier p, on ait A^p est nulle, alors A n'est pas inversible.

Exercice $\boxed{7}$ **énoncé :**

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, d'indéterminée X et $\mathbb{R}_d[X]$, celui de ces polynômes de degré inférieur ou égal à d.

1. Justifier que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. On en donne $\mathcal{B} = (1\ ;\ X\ ;\ X^2)$ la base dite *canonique*.
2. Démontrer que $\mathcal{C} = (X^2 - 1\ ;\ 2X + 1\ ;\ X^2 + X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
3. Ecrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ puis en déterminer l'inverse.

Exercice $\boxed{8}$ **énoncé :**

Soit A une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels.

1. Démontrer que, si A est diagonalisable, alors A^3 l'est aussi.
2. On donne $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer B^3 et discuter de la diagonalisabilité des matrices B et B^3.
3. On donne $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer C^3 et discuter de la diagonalisabilité des matrices C et C^3.
4. L'énoncé donné en question **1.** admet-il une réciproque ?

Exercice $\boxed{9}$ **énoncé :**

On se donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note φ l'application définie sur $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par : $\varphi(X) = AX$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le rang $rg(A)$ de la matrice A. L'application φ est-elle bijective ?
3. On définit $\psi : X \mapsto A^2X$ sur E. Démontrer, de même, que ψ est un endomorphisme de E puis déterminer $rg(\psi)$.

Exercice $\boxed{10}$ **énoncé :**

On considère une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 = O_2$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Donner les valeurs propres de M, en justifiant.
2. Justifier qu'on a aussi $M^2 = O$
3. Déterminer toutes les matrices M vérifiant la condition donnée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
4. Peut-on étendre cette étude à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Expliquer votre démarche.

Exercice $\boxed{11}$ énoncé :

On considère quatre variables aléatoires notées X, Y, Z et T définies sur un même espace $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$.
On définit alors enfin une *matrice aléatoire* A comme :

$$\forall \omega \in \Omega \quad A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & T(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la probabilité que la matrice A soit inversible.
2. Déterminer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.

Analyse

Exercice $\boxed{12}$ énoncé :

1. A quelle condition sur le réel q la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\ q^{n-1}$ converge-t-elle ?
   Rappeler sa valeur dans le cas de convergence (en fonction de q)
2. Justfier la convergence puis donner la valeur de : $S = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ 3^{-k}$

Exercice $\boxed{13}$ énoncé :

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^2 - 4xy + x - y^2 - 1 \end{array}$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. f réalise-t-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier

Exercice $\boxed{14}$ énoncé :

Déterminer un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{(1+x)^{\frac{2}{3}}}{1+x}$

En déduire la valeur de : $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{(1+2h)^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{1}{(1-h)^{\frac{1}{3}}}$

Exercice $\boxed{15}$ énoncé :

1. Soit f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ où l vérifie $f(l) = l$.
2. Etudier la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n\right)^2 \end{cases}$$

Exercice $\boxed{16}$ énoncé :

Donner le développement limité de la fonction $\exp : x \mapsto e^x$ au voisinage de 0, à l'ordre 2.
En déduire un équivalent à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n+1}{n} \quad ; \ n \in \mathbb{N}$$

Exercice $\boxed{17}$ énoncé :

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0
2. En déduire un équivalent à l'infini de la suite u_n définie par :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \quad ; \ n \in \mathbb{N}$$

Exercice $\boxed{18}$ énoncé :

1. Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\, x^n$ converge-t-elle ?
2. Justifier de la convergence, puis déterminer la valeur somme de : $S = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice $\boxed{19}$ énoncé :

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} S_n$
2. En déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

Exercice $\boxed{20}$ énoncé :

1. Pour quelles valeurs de α réel l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ est-elle bien définie et convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α réel l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ est-elle bien définie et convergente ?
3. Déterminer les valeurs du réel p pour lesquelles l'intégrale suivante converge : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-pt} \mathrm{d}t$ et, lorsque possible, calculer sa valeur (en fonction de p).

Exercice $\boxed{21}$ énoncé :

On se donne une application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x;y) = x^3 - 3xy^2 + 2y^2 + 3$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. Déterminer la matrice Hessienne de f au point $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.
3. La fonction f réalise-t-elle un extremum local ? Justifier

Exercice $\boxed{22}$ énoncé :

On se donne l'intégrale (généralisée) $I = \displaystyle\int_0^1 \ln t \ \ dt$.

1. En quoi cette intégrale est-elle impropre ? Justifier de la convergence de I puis en donner la valeur.
2. Déterminer, en fonction du réel α, la nature de l'intégrale :

$$J_\alpha = \int_0^1 (\ln t)^\alpha \quad dt$$

Exercice $\boxed{23}$ énoncé :

On se donne la fonction f définie sur l'ouvert $\mathcal{O} =]-1; +\infty[\times]-1; +\infty[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x; y) \mapsto x \ln(1+y) + y \ln(1+x)$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{O}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage du point origine $(0; 0)$

Exercice $\boxed{24}$ énoncé :

On se donne la fonction g définie sur l'ouvert $\mathcal{O} =]-1; +\infty[\times]-1; +\infty[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g : (x; y) \mapsto \frac{1-e^x}{1+y}$$

1. Justifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{O}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de g au voisinage du point origine $(0; 0)$

Exercice $\boxed{25}$ énoncé :

1. Pour f, fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant un point a, rappeler la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de a.
2. Fournir un développement limité au voisinage de $t = 0$ à l'ordre 2 pour chacune des trois fonctions suivantes :

$$f(t) = \ln(1+t) \quad ; \quad h(t) = \sqrt{1+t} \quad ; \quad g(t) = \frac{1+t}{1-t}$$

Exercice $\boxed{26}$ énoncé :

1. Pour quelles valeurs de α réel l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ est-elle bien définie et convergente ?
2. Déterminer les valeurs du réel λ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\lambda\, t} \mathrm{d}t$

3. Déterminer les valeurs du réel p pour lesquelles l'intégrale suivante converge : $\int_0^{+\infty} 4t^2 e^{-pt} \mathrm{d}t$ et, lorsque possible, calculer sa valeur (en fonction de p).

Exercice $\boxed{27}$ énoncé :

1. Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n\, x^n$ converge-t-elle ?
2. Justifier de la convergence, puis déterminer la valeur somme de : $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice $\boxed{28}$ énoncé :

On considère la fonction f définie $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x; y) = 4x^3 - 3xy^2 - 12xy - 12x + 7$$

1. Déterminer le gradient de f au point $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ puis chercher les éventuels points critiques de f.
2. Déterminer la matrice Hessienne de f en chaque point critique trouvé.

Probabilités

Exercice $\boxed{29}$ énoncé :

On donne X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0; 1[$.
Soit alors $\lambda > 0$ un réel, on définit $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$.

1. Déterminer la loi de Y, en préciser son espérance et sa variance (éventuelles)
2. Si $Z = 1 - \exp(-\lambda \cdot Y)$, quelle serait la loi suivie par Z ? Justifier

Exercice $\boxed{30}$ énoncé :

On se donne deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur un espace probabilisé $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$, suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

1. Rappeler la loi de la somme $Y = X_1 + X_2$.
2. Quelles sont alors les espérance et variance de la variable aléatoire Y ?
3. Calculer $\mathbb{P}[Y > 2]$ dans le cas où $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$

Exercice $\boxed{31}$ énoncé :

On se donne une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$ suivant une loi normale centrée réduite et on définit $Y = 3X - 1$

1. Déterminer la loi de Y, puis déterminer son espérance et sa variance.
2. Si $Z = aY + b$, où a et b sont des constantes réelles fixées, comment choisir a et b pour que Z suive une loi normale centrée d'écart-type 2 ?

Exercice $\boxed{32}$ énoncé :

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega \ ; \ \mathcal{A} \ ; \ \mathbb{P})$.

1. Rappeler la densité d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega \ ; \ \mathcal{A} \ ; \ \mathbb{P})$ suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et rappeler ses paramètres d'espérance et de variance.
2. Déterminer la valeur de l'intégrale :
$$I = \int_0^{+\infty} (x - x^2)e^{-2x} \, dx$$
après en avoir justifié la convergence.

Exercice $\boxed{33}$ énoncé :

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega \ ; \ \mathcal{A} \ ; \ \mathbb{P})$ et on y définit une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ fixé.

1. Donner la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
2. Démontrer la propriété :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}_{[X>t]}[X > x + t] = \mathbb{P}[X > x]$$

Exercice $\boxed{34}$ énoncé :

On se place sur un espace probabilisé $(\Omega \ ; \ \mathcal{A} \ ; \ \mathbb{P})$ et on y définit une variable aléatoire U suivant une loi uniforme sur $[0; 1[$.

1. On considère $U_1 \ldots U_n$, n variables aléatoires de même loi que U, toutes mutuellement indépendantes et on pose $F_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$. Que représente F_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et quelle en est l'espérance ?
2. Soient a et b deux réels fixés avec $a \neq 0$. Déterminer la loi suivie par $X = aU + b$ et en donner l'espérance et la variance.

Exercice $\boxed{35}$ énoncé :

On se donne un espace probabilisé $(\Omega \ ; \ \mathcal{A} \ ; \ \mathbb{P})$ sur lequel on définit une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu \ ; \ \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ donnés.

1. On rappelle que X^* désigne la variable aléatoire centrée-réduite associée à X. Décrire X^* en fonction de X, μ et σ.
2. Donner une densité de la variable aléatoire X^* et en déduire une densité de X.

Exercice $\boxed{36}$ énoncé :

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega \ ; \ \mathcal{A} \ ; \ \mathbb{P})$ et on y définit une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée-réduite.

1. Donner une densité de X.
2. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale suivante, après en avoir justifié la convergence :
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$

Exercice $\boxed{37}$ énoncé :

Soient $(X_1\ ; \ldots ;\ X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires mutuellement indépendantes d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$, où n désigne un entier naturel non nul. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$ à estimer.

1. Démontrer que $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ est une estimateur sans biais de p
2. Déterminer le risque quadratique de l'estimateur T_n.

Exercice $\boxed{38}$ énoncé :

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ et on y définit des variables aléatoires réelles discrètes notées $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ (avec $n \geq 2$ entier naturel)

1. Rappeler la définition de : “ les variables aléatoires $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ sont mutuellement indépendantes".
   On supposera effectivement dans la suite que $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ sont mutuellement indépendantes.
2. Si chaque X_k (avec $1 \leq k \leq n$) suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$, que valent l'espérance et la variance respectives de $S = X_1 + \cdots + X_n$?
3. Si chaque X_k (avec $1 \leq k \leq n$) suit une loi uniforme (discrète) sur l'intervalle d'entiers $[\![1\ ;\ n]\!]$, quelle est la loi de $M = \max(X_1 \ldots X_n)$?

Exercice $\boxed{39}$ énoncé :

Sur un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$, on définit une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite.

1. Si $Y = 4 - 2X$, quelle est la loi suivie par Y ? On en donnera son espérance et sa variance.
2. Quelles valeurs m et p pourrait-on choisir pour que $Z = mX + p$ suive une loi normale $\mathcal{N}(3;3^2)$? ?

Exercice $\boxed{40}$ énoncé :

On considère un n-échantillon $(X_1\ ;\ \ldots\ ;\ X_n)$ d'une loi uniforme continue sur $[a;b]$ et on pose $S_n = \max(X_k)_{k\leq n}$.
On cherche à estimer le paramètre b (et on suppose a connu).

1. Démontrer que S_n est bien un estimateur de b et que son biais est $\dfrac{a-b}{n+1}$.
   Est-il asymptotiquement sans biais ?
2. Vérifier que le risque quadratique de S_n vaut $\dfrac{2(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}$ après en avoir justifié l'existence.

Exercice $\boxed{41}$ énoncé :

Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ et prenant ses valeurs dans $[a;b]$ non vide.

1. Rappeler la définition de la variance de X dans ce cas.
2. Donner l'expression du moment d'ordre r de X.
3. Soit $c = \dfrac{b+a}{2}$. Donner les valeurs dans le cas où X suit une loi donnée par :

$$P([X=a]) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P([X=c]) = \frac{1}{6} \quad ; \quad P([X=b]) = \frac{1}{2}$$

Exercice $\boxed{42}$ énoncé :

Rappeler la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$.
Démontrer ensuite qu'il existe une variable aléatoire X d'un tel espace dont la fonction de répartition F_X est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$$

Exercice $\boxed{43}$ énoncé :

Soient U et V deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$. On suppose que U suit une loi exponentielle de paramètre $u > 0$ et que V suit une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$.

1. Donner les valeurs d'espérance et de variance de U et V respectivement.
2. On pose $Z = UV$.
   (a) Déterminer la valeur de $\mathbb{P}[Z = 0]$
   (b) Décrire la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z.

Exercice $\boxed{44}$ énoncé :

On définit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Rappeler le support $X(\Omega)$ de la variable aléatoire X et donner les valeurs de $\mathbb{P}[X = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Quelles sont les espérance et variance respectives de X ?
3. On se donne λ et μ deux réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \times \frac{\mu^{n-k} e^{-\mu}}{(n-k)!}$$

Exercice $\boxed{45}$ énoncé :

On se donne un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ sur lequel on définit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner une densité de X et rappeler les valeurs d'espérance et de variance de X
2. Calculer $\mathbb{P}\left[X \geq \mathbb{E}[X]\right]$. Que remarquez-vous ?
3. Déterminer le réel α pour que l'on ait :

$$\mathbb{P}[X \geq \alpha] \quad = \quad \mathbb{P}[X \leq \alpha]$$

Exercice $\boxed{46}$ énoncé :

On dispose de deux pièces identiquement truquées : la probabilité pour chacune d'obtenir *face* est un réel $p \in]0;1[$.
On lance simultanément ces deux pièces jusqu'à obtention de résultats distincts (l'une tombe sur *pile* tandis que l'autre tombe sur *face*). On note T le nombre total de pièces lancées.
On admet alors que T peut être définie sur un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$.

1. Donner l'ensemble $T(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de T. Calculer son espérance et sa variance.

3. L'une des pièces est en cuivre, et l'autre en bronze. On admet que malgré cela, la valeur p reste inchangée. Le lanceur des pièces est en mesure de reconnaître ces deux pièces.
   On réalise alors l'expérience suivante :
   On jète les deux pièces simultanément et à répétition jusqu'à obtention de face pour l'une et pile pour l'autre. On marque 1 si, à ce moment, la pièce de bronze est tombée sur face. Sinon, on marque 0.
   Démontrer qu'à l'issue d'une telle expérience, la valeur X marquée suit une loi uniforme discrète sur $\{0; 1\}$.

Exercice $\boxed{47}$ **énoncé :**

On définit une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée-réduite.

1. Donner une densité de X.
2. On pose $Y = 2 + 4X$. Quelle est la loi suivie par Y ? On en donnera son espérance et sa variance.
3. Quelles valeurs m et p choisir pour que $Z = mX + p$ suive une loi normale d'espérance 2 et d'écart-type 4 ?

Exercice $\boxed{48}$ **énoncé :**

On définit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$

1. Donner une densité de X et indiquer son espérance et sa variance.
2. Justifier de la convergence puis calculer la valeur de : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} (3x - x^2)e^{-3x}\mathrm{d}x$
3. Déterminer, en fonction du réel p la nature (convergence) de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}\mathrm{d}t$

Exercice $\boxed{49}$ **énoncé :**

On donne X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0; 1[$.
Soit alors $\lambda > 0$ un réel, on définit $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$.

1. Déterminer la loi de Y, en préciser son espérance et sa variance (éventuelles)
2. Comment choisir α et β réels pour que $U = \alpha X + \beta$ suive une loi uniforme (à densité) sur $[-2; 3]$?
3. Rappeler la définition du moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité puis caculer $m_r(X)$ pour $r \in \mathbb{N}^*$.

Exercice $\boxed{50}$ **énoncé :**

On dispose d'un jeu de N cartes portant chacune un numéro disctinct compris entre 1 et N. On suppose ce jeu suffisamment bien mélangé pour que tirer une carte de ce jeu consitue une expérience aléatoire sous équiprobabilité.
On procède à des tirages successifs, sans remise et on note les numéros obtenus dans l'ordre de sortie, jusqu'à épuisement du jeu de cartes.
Pour i entier compris entre 1 et n, on définit X_i la variable aléatoire renvoyant 1 si la carte tirée au $i-$ème tirage porte le numéro i et 0 sinon.

1. Décrire la loi de X_i pour i entier compris entre 1 et N
2. En déduire l'espérance de la variable aléaoire Y qui donne le nombre de fois où, au cours des tirages successifs réalisés, la carte porte pour numéro le rang de tirage effectué
3. On dira que le résultat d'un tirage de rang k donné est un *sommet* lorsque le numéro porté par la carté tirée au rang k porte un numéro supérieur à tous ceux déjà obtenus avant.
   (a) Quelle est la probabilité de vider l'urne en ne réalisant qu'un seul, unique, sommet au cours des tirages ?
   (b) Quelle est la probabilité de réaliser N sommets en vidant l'urne ?